

Alte cazuri de nedeterminare
(rezolvate cu regulile lui L'Hospital)

Fie $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, interval și x_0 punct de acumulare al aceluia.

Cazurile de nedeterminare: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ pot fi reduse la unul din cazurile $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ printr-o scriere adecvată pentru $f \cdot g$, $f - g$ și respectiv f^g .

1. Cazul $0 \cdot \infty$ Fie $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$.

Putem scrie $f \cdot g = f \cdot \frac{1}{\frac{1}{g}}$, dacă $g(x) \neq 0$ sau $f \cdot g = g \cdot \frac{1}{f}$, dacă $f(x) \neq 0$, $x \in I \setminus \{x_0\}$ și se obține cazul $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\text{Ex: } 1. \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x'}{(e^{-x})'} = \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x \cdot \ln x \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x'}{\left(\frac{1}{\ln x} \right)'} = \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x \ln^2 x \text{ — mai complicată decât în 1.}$$

Încercăm cu inversa primei funcții (x).

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-x) = 0,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln(\tan x) \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\sin x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\tan x))'}{\left(\frac{1}{\sin x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)'}{-\frac{1}{\sin^2 x} (\sin x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{-\cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{0}{1} = 0$$

2. Capul $\infty - \infty$: Avem de calculat $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ și

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$. Și în acest caz se poate

reduce în două moduri la cazurile studiate, folosind:

$$1) f - g = \frac{f - g}{\frac{1}{f \cdot g}} = \frac{f}{\frac{1}{f \cdot g}} - \frac{g}{\frac{1}{f \cdot g}} = \frac{f}{\frac{1}{g}} - \frac{g}{\frac{1}{f}} \Rightarrow \text{capul } \left(\frac{0}{0} \right).$$

sau 2) $f-g = f \cdot \left(1 - \frac{g}{f}\right)$ când pentru $\frac{g}{f}$ avem $\frac{\infty}{\infty}$.

Dacă aici : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow$ ptr. $f \cdot \left(1 - \frac{g}{f}\right)$ avem cazul de nedeterminare $0 \cdot \infty$.

Ex: Să se calculeze:

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\overset{f(x)}{\frac{\cos x}{\sin x}} - \overset{g(x)}{\frac{1}{x}} \right) = \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{\sin x}}{\frac{\cos x}{x \cdot \sin x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \cdot \sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x' \cos x + x (\cos x)' - (\sin x)'}{x' \sin x + x (\sin x)'} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\cos x} - x \sin x - \cancel{\cos x}}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x \sin x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x)' \sin x - x (\sin x)'}{(\sin x)' + x' \cos x + x (\cos x)'} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{1+1-0} = \frac{0}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

$$2). \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \xrightarrow{\text{capul 2.}} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{Calculăm } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \infty \cdot (1 - 0) = \infty.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \Rightarrow \infty \cdot (1 - 0) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Obs: Atât în capul 2, cât și în 3, am forțat factor comun funcția mai „puternică”: x față de $\ln x$ (2), și respectiv e^x față de x (ex 3).

[3]. Cazurile: 0^0 , ∞^0 , 1^∞ se folosește relația $f = e^{g \ln f}$

și se obține unul dintre cazurile de nedeterminare anterioare.

Ex: Să se calculeze:

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{x^{(0^0)}} \equiv \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (e^{x \ln x}) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

series $f \cdot g = f : \frac{1}{g}$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-x) = 0 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\textcircled{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1-x)^{\frac{1}{\sin x}} \stackrel{1^\infty}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{\sin x} \cdot \ln(1-x)} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{\ln(1-x)}{\sin x}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1-x)}{\sin x}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1-x)}{\sin x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln(1-x))'}{(\sin x)'} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{1-x} \cdot (1-x)'}{\cos x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{(1-x) \cos x} = -1 \cdot \textcircled{1}$$

$$\textcircled{3} \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x > 0}} x^{\frac{1}{x}} \stackrel{(\infty^0)}{=} e^{\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x > 0}} \frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x}} \stackrel{\uparrow \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} e^0 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x > 0}} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln \cos x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)'}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{-1}{2 \cos x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \left(-\frac{1}{2 \cos x}\right) = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

TEMA pag 282 / E3 - E7. man.

+ Teste ^{roc} pag (283 - 284).