LECTIA 19 ① 19.05

CLASA XI C

PROF. SCHNAKOVSZKI C.

A DOUA REGULĂ A LUI L'HOSPITAL

TEOREMA 2 (Regula lui L'Hospital pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$).

Fie funcțiile $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval și x_0 un punct de acumulare al acestuia.

Dacă: a) $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$

b) f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$

c) $g'(x) \neq 0$, pentru $x \in I \setminus \{x_0\}$.

d) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ există în $\overline{\mathbb{R}}$,

atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 ~~și $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$~~

și $$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

EXERCIȚII:

1. Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$.

Fie $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$, $x \in (0; +\infty)$.

Avem $\lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x \to \infty} x = +\infty$.

Funcțiile f și g sunt derivabile pe $(0;+\infty)$, iar $g'(x) \cancel{\neq 1} \neq 0$, $(\forall)\, x \in (0;+\infty) \Rightarrow$ cu regula lui L'Hospital: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\overset{x+2)}{x^2}}{x+1} - \frac{\overset{x+1)}{x^2-3}}{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x+2)-(x+1)(x^2-3)}{(x+1)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2-(x^3-3x+1x^2-3)}{x^2+2x+1x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}+2x^2-\cancel{x^3}+3x-1x^2+3}{x^2+3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+3}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+3x+3)'}{(x^2+3x+2)'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{2x+3} = 1.$$ (x^2+3x+3, x^2+3x+2 - sunt derivabile și $g'(x)\neq 0$).

<u>Obs</u>: Dacă funcțiile f și g au derivate de ordin superior și funcțiile derivate ale acestora satisfac condițiile teoremei lui L'Hospital, atunci se poate aplica regula de mai multe ori pt. $\frac{f}{g}$, $\frac{f'}{g'}$, $\frac{f''}{g''}$ până la îndepărtarea nedeterminării.

Ex. 3) Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(e^{2x})'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x}\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(e^{2x})'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\cdot e^{2x}}{1} = 2\cdot e^{\infty} = \infty.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x})'}{(3x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot(2x+1)}{3} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{6\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}(2+\frac{1}{x})}{2\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot\frac{1}{3} = 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{5x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x})'}{(5x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot(2x+1)}{5} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot\frac{1}{5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}(2+\frac{1}{x})}{2\cdot(-\cancel{x})\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot\frac{1}{5}$

$= -1\cdot\frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln(1+e^x))'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+e^x}\cdot e^x}{1} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(1+e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+2e^x)}{\ln(1+3e^x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln(1+2e^x))'}{(\ln(1+3e^x))'} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+2e^x}\cdot(1+2e^x)'}{\frac{1}{1+3e^x}\cdot(1+3e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^x}{1+2e^x}\cdot\frac{1+3e^x}{3e^x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\cdot(\underbrace{\tfrac{1}{e^x}}_{\to 0}+2)} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{e^x}\cdot(\overbrace{\tfrac{1}{e^x}}^{\to 0}+3)}{3\cdot\cancel{e^x}} = 1\cdot 1 = 1$$

f) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x+e^x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+x+1)'}{(x+e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{1+e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)'}{(1+e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^\infty} = \frac{2}{\infty} = 0$$

g) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x+x^2-e^x}{x^3+x^4+e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+x^2-e^x)'}{(x^3+x^4+e^{2x})'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+2x-e^x}{3x^2+4x^3+2\cdot e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+2x-e^x)'}{(3x^2+4x^3+2\cdot e^{2x})'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-e^x}{6x+12x^2+4\cdot e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(2-e^x)'}{(6x+12x^2+4\cdot e^{2x})'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-e^x}{6+24x+8\cdot e^{2x}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(-e^x)'}{(6+24x+8\cdot e^{2x})'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-e^x}{24+16\cdot e^{2x}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-\cancel{e^x}}{32\cdot e^{\cancel{2x}x}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$