

TEOREMA LUI LAGRANGE

Această teoremă este o generalizare simplă a teoremei lui ROLLE în care funcția f nu mai ia obligatoriu valori egale la capetele a, b ale intervalului considerat.

TEOREMA (lui Lagrange)

Fie o funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Dacă: 1) f este continuă pe intervalul $[a, b]$

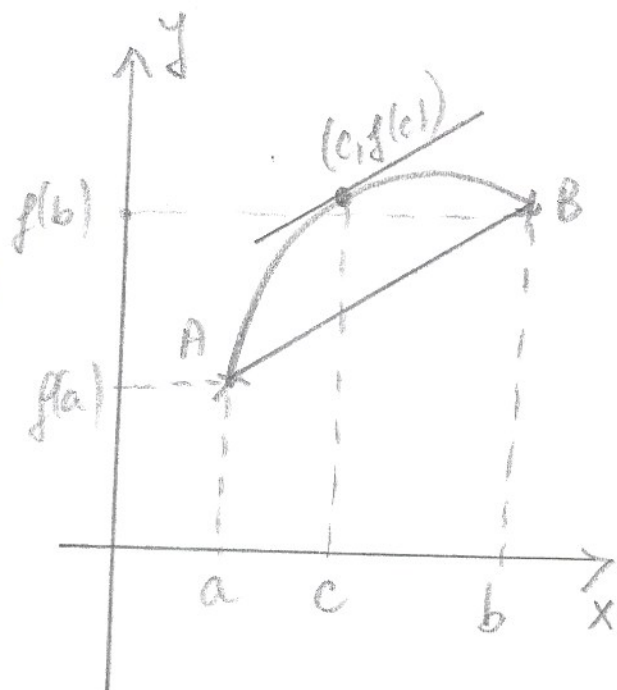
2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b) ,

atunci există cel puțin un punct c din intervalul deschis (a, b) , pentru care: $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$

Interpretare geometrică:

T. Lagrange mai poate fi scrisă: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, ceea

ce arată că există pe G_f cel puțin un punct $(c, f(c))$ diferit de extremități, în care panta tangentei ($f'(c)$) este egală cu panta coardei AB , sau tangenta $\parallel AB$.



-(2)-

Exerciții:

1. Să se aplice T. Lagrange funcției $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \frac{2x-1}{x+5}$.

f este continuă pe $[-1, 1]$ - ca funcție elementară (ratională), derivabilă pe $(-1, 1)$ (ca fct. elementară).
Conform T. lui Lagrange, $(\exists) c \in (-1, 1)$ a.i.

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(c) \Rightarrow \frac{2 \cdot 1 - 1 - [2 \cdot (-1) - 1]}{2} = f'(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+3}{2} = f'(c) \Rightarrow \frac{\frac{2}{1} + \frac{3}{1}}{2} = f'(c) \Rightarrow \frac{11}{2} = f'(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{11}{24} = f'(c) \quad (1)$$

$$\text{Dar } f'(x) = \frac{(2x-1)'(x+5) - (2x-1) \cdot (x+5)'}{(x+5)^2} = \frac{2(x+5) - (2x-1) \cdot 1}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{2x+10-2x+1}{(x+5)^2} = \frac{11}{(x+5)^2} \Rightarrow f'(c) = \frac{11}{(c+5)^2} \quad (2)$$

$$\text{Egalând 1) cu 2) } \Rightarrow \frac{11}{(c+5)^2} = \frac{11}{24} \Rightarrow (c+5)^2 = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c+5 = \pm \sqrt{24} \Rightarrow c = -5 \pm 2\sqrt{6} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Cum } c \in (-1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{c = -5 + 2\sqrt{6}}$$

- (3) -

2. Să se determine abscisa unui punct c în care tangenta la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+1}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{să fie paralelă la coarda care unește punctele de abscise}$$
$$x_1 = -4, x_2 = 3.$$

Prin urmare în vedere interpretarea geometrică a T. Lagrange, probl. revine la a aplica T. lui Lagrange funcției pe intervalul $[-4; 3]$.

- studiem continuitatea pe $[-4; 3]$

f este cont. pe $[-4; 0) \cup (0; 3]$ ca fiind compusă din funcții elementare. Studiem continuitatea în $x = 0$:

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{x+2}{2} \right) = \frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sqrt{x+1}) = \sqrt{0+1} = 1$$

$$f(0) = \frac{0+2}{2} = 1$$

$\Rightarrow l_s = l_d = f(0) = 1$
 $\Rightarrow f$ este cont. în 0
 $\Rightarrow f$ este cont. pe $[-4; 3]$

- studiem derivabilitatea pe $[-4; 3]$

f este derivabilă pe $[-4; 0) \cup (0; 3]$ ca compunere de funcții elementare $\Rightarrow$ studiem derivabilitatea în $x = 0$

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\frac{x+2}{2} - \frac{2}{2}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{2x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

-4-

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1}}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f'_0(0) = f'_d(0) \Rightarrow f$ este derivabilă în $x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ derivabilă pe $(-4; 3)$

Aplicând t. lui Lagrange $\Rightarrow (\exists) c \in (-4; 3)$ a.i.

$$\frac{f(3) - f(-4)}{3 - (-4)} = f'(c) \Rightarrow \frac{\sqrt{3+1} - \frac{-4+2}{2}}{7} = f'(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2+1}{7} = f'(c) \Rightarrow \left| f'(c) = \frac{3}{7} \right| \in (0, 3) \quad (1)$$

$$\text{Dar } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-4; 0] \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, & x \in (0; 3) \end{cases} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c+1}} \quad (2)$$

$$\text{Egalând 1) cu 2) } \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c+1}} = \frac{3}{7} \Rightarrow \sqrt{c+1} = \frac{7}{6} \quad /^2$$

$$\Rightarrow c+1 = \frac{49}{36} \Rightarrow c = \frac{49}{36} - 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{13}{36}} \in (0, 3)$$

③ Să se determine parametrii $m, n \in \mathbb{R}$ a.i. funcției f să i se poată aplica t. lui Lagrange pe mulțimea de definiție. Să se aplice efectiv teorema:

$$f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & x \in [-1; 0] \\ m \sin \pi x + n, & x \in (0; 1] \end{cases}$$

- studiem continuitatea

f este continuă pe $[-1;0) \cup (0;1]$ ca funcții elementare

Studiem cont. în $x=0$

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x^2 + 2x + 1) = 1$$

$$l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (m \sin \pi x + n) = m \cdot \sin 0 + n = n$$

$$l_s = l_d$$

$$\Rightarrow \boxed{n=1}$$

- studiem derivabilitatea

f derivabilă pe $[-1;0) \cup (0;1]$ ca fct. elem.

Studiem derivabilitatea în $x=0$

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x(x+2)}{x} = 2$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{m \sin \pi x + n - n}{x} = m \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin \pi x}{\pi x} = m \cdot 1 \cdot \pi = m\pi$$

$$\Rightarrow m\pi = 2 \Rightarrow \boxed{m = \frac{2}{\pi}} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & x \in [-1;0] \\ \frac{2 \sin \pi x}{\pi} + 1, & x \in (0;1] \end{cases}$$

Aplicând t. lui Lagrange $\Rightarrow (\exists) c \in (-1;1)$ a.i.

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(c) \Rightarrow \frac{2 \frac{\sin \pi}{\pi} + 1 - [2 \frac{\sin(-\pi)}{\pi} + 1]}{2} = f'(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f'(c) = 0| \in [-1;0]$$

$$\text{Dar } f'(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \in [-1;0] \\ \frac{2}{\pi} \cos \pi x \cdot \pi, & x \in (0;1] \end{cases} \Rightarrow f'(c) = 2c + 2 > 2c = -2 \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

TEMA manual pag 271-272 - ex. reformat

E1, E2, E3 / 273.