

CONSECINȚE ALE TEOREMEI LUI LAGRANGE

Din teorema lui Lagrange se obțin câteva rezultate foarte importante în analiza matematică.

Astfel, următorul rezultat permite să decidem dacă o funcție are derivată într-un punct.

CONSECINȚA 1: Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $x_0 \in I$.

Dacă: a) f este continuă în x_0

b) f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$

c) există $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$,

atunci funcția f are derivată în x_0 și $f'(x_0) = l$

Ex: Să se studieze derivabilitatea funcției

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x + \ln x, & x > 1 \end{cases}$ folosind consecința teoremei lui Lagrange.

- studiem continuitatea în $x=1$

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 1^2 = 1$$

$$l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 1 + \ln 1 = 1$$

$$f(1) = 1$$

$$\Rightarrow l_s = l_d = f(1) \Rightarrow f \text{ cont. în } 1$$

- f este derivabilă pe $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ ca fiind formată din funcții elementare

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 1 + \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2$$

$$\left. \begin{aligned} &\Rightarrow l_0 = l_d \\ &\Rightarrow (\exists) \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 2 \\ &\Rightarrow \text{din consecință} \end{aligned} \right\}$$

f are derivată în $x=1$ și $f'(1)=2 \Rightarrow f$ derivabilă în 1.

Obs: 1) Aplicarea consecinței 1 fără verificarea în 1. al tuturor ipotezelor poate duce la concluzii greșite.

2) Consecința 1 a teoremei lui L'Hospital dă o condiție suficientă pentru existența derivatei unei funcții într-un punct, dar nu și necesară (f să fie continuă în punct și să existe limita derivatei în punct), dar condiția nu este încă și necesară (adică să fie continuă, derivabilă, să existe limita în x_0 și totuși f să nu aibă derivată). (ex. pag 276-277 man)

CONSECINȚA 2: (caracterizarea funcțiilor constante)

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe $[a, b]$. Atunci f este constantă $\Leftrightarrow f' = 0$.

CONSECINȚA 3: Ex: 1. Să se arate că;

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Fie $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cdot (\cos x) \cdot (-\sin x) = 2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow f = \text{const. cu } f(x) = f(0) = 1$.

(3)

b) $\arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, (\forall) x \in \mathbb{R}.$

fie $f(x) = \arctg x + \operatorname{arccotg} x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \stackrel{\text{consec.}}{\Rightarrow} f(x) = \text{constantă}$ cu

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \arctg \frac{\pi}{4} + \operatorname{arccotg} \frac{\pi}{4} =$

$f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$

c) $\arcsin(2x) + \arccos(2x) = \frac{\pi}{2}, (\forall) x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$

fie $f: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arcsin(2x) + \arccos(2x)$ - derivabilă pe $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = 0, (\forall) x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \stackrel{\text{consec.}}{\Rightarrow}$

$f(x)$ este constantă pe $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) = c, (\forall) x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ptr. $x = 0 \Rightarrow f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2}$

d) $\arctg x^2 + \operatorname{arccotg} x^2 = \frac{\pi}{2}, (\forall) x \in \mathbb{R}.$

fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg x^2 + \operatorname{arccotg} x^2$ - derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^4} + \frac{-2x}{1+x^4} = 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \text{constantă}$

ptr. $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2}, (\forall) x \in \mathbb{R}.$

CONSECINȚA 3:

Fie $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, funcții derivabile pe intervalul I, a, i .

$$f'(x) = g'(x), (\forall) x \in I.$$

A atunci există $c \in \mathbb{R}$, a.i. $f - g = c$ (Funcțiile f și g diferă printr-o constantă).

Ex: 1) Să se arate că funcțiile $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+2}{1-2x}$,
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ diferă printr-o constantă pe fiecare din intervalele
 $(-\infty; \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}; +\infty)$.

—4—

$$\text{Calculăm } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{1-2x}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+2}{1-2x}\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(x) \text{ pe } (-\infty; \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}; +\infty) \Rightarrow \text{există } K_1, K_2 \in \mathbb{R} \text{ a.i.}$$

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} K_1, & x < \frac{1}{2} \\ K_2, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pentru determinarea constantelor K_1, K_2 , particularizăm pe x în fiecare interval

$$x=0 \Rightarrow f(0) - g(0) = -\operatorname{arctg} 2 = K_1$$

$$x=1 \Rightarrow f(1) - g(1) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 3 = K_2.$$

2. Să se determine funcția derivabilă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
cu proprietățile $f'(x) = x^2 - 3x + 5$ și $f(0) = 1$.

—

Se obs. că derivata funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x$
este $g'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x + 5 = x^2 - 3x + 5 = f'(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\exists) K \in \mathbb{R}$ o constantă a.c. $f(x) - g(x) = K$.

Pth. $x=0 \Rightarrow f(0) = g(0) + K = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + 1$.

3. Să se determine funcția derivabilă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu
prop. $f'(x) = x + 1$, $f(0) = 0$.

—

Se obs. că derivata funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^2}{2} + x$
este $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x + 1 = x + 1 = f'(x), (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists) K \in \mathbb{R}$ o constantă a.c. $f(x) - g(x) = K$.

Pth. $x=0 \Rightarrow f(0) = g(0) + K \Rightarrow f(x) = \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + x$.

TEMA

$E_1, E_3, E_4, E_5 / 277$ man