

EXERCITII - Teorema lui ROLLE

1. Să se arate că derivata funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = (x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$ are numai rădăcini reale.

$\#$
 $f(-3) = f(-2) = f(2) = f(3) = 0$ ^{consec. 1.} $\Rightarrow$ (între două zerouri ale funcției ($\exists$) cel puțin un zero al derivatului)

$\Rightarrow (\exists) c_1 \in (-3; -2), c_2 \in (-2, 2), c_3 \in (2, 3)$ a.i.

$f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ are numai rădăcini reale (c_1, c_2, c_3)
gradul lui $f' = 3$

2. Să se aplice proprietatea lui ROLLE funcției

$f: [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 9x^2$, pe intervalul $[-3; 3]$

$\#$
 $f(x) = x^4 - 9x^2$ este cont. și derivabilă

$f(-3) = (-3)^4 - 9 \cdot (-3)^2 = 3^4 - 9 \cdot 3^2 = f(3)$ ^{T.R.} $\Rightarrow (\exists) c \in (-3; 3)$

a.i. $f(c) = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 18x$

$$f'(c) = 4c^3 - 18c \Rightarrow 4c^3 - 18c = 0$$

$$2c(2c^2 - 9) = 0$$

$$\boxed{c_1 = 0} \in [-3; 3]$$

$$2c^2 = 9 \Rightarrow c = \pm \frac{3}{2}$$

$$c = \pm \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{c_{2,3} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}} \in [-3; 3]$$

3. Să se stabilească dacă se poate aplica propr. lui ROLLE pentru funcțiile următoare pe dom. de definiție:

a) $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)(x-2)$.

$\rightarrow f$ cont. și derivabilă pe $[1, 2]$

$$f(1) = f(2) = 0 \Rightarrow \exists c \in (1, 2) \text{ a.i. } f'(c) = 0$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow$$

$$\rightarrow 2c - 3 = 0 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

b) $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [-1; 0) \\ x-3, & x \in [0; 1] \end{cases}$

- studiem cont. în $x=0$ (f pe $[-1; 0)$ și $(0; 1]$ este cont. ca fct. elem.)

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x-1) = 0-1 = -1$$

$$l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x-3) = 0-3 = -3$$

$\Rightarrow l_s \neq l_d \Rightarrow f$ nu este cont. pe $[-1, 1]$

se poate aplica T. ROLLE.

c) ~~fct.~~ $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in [-1, 0] \\ x+1, & x \in (0, 1] \end{cases}$

- studiem cont. în $x=0$ (f pe $[-1; 0] \cup (0; 1]$ este cont. ca fct. elementare)

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x^2+1) = 0^2+1 = 1$$

$$l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x+1) = 0+1 = 1$$

$$f(0) = 1$$

$$\Rightarrow l_s = l_d = f(0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ cont. pe $[-1, 1]$.

- Studiem derivabilitatea pe $[-1, 1]$

$$\left. \begin{aligned} f'_s &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x = 0 \\ f'_d &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x + 1 - 1}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'_s \neq f'_d \Rightarrow f$ nu este derivabilă pe $(-1, 1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ nu se poate aplica T. ROLLE.

4. Sa se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ ca, f să satisfacă condițiile de aplicabilitate ale proprietății lui Rolle:

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} mx^2 + nx + p, & x \in [-1, 0] \\ e^x, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

- punem cond. ca f să fie cont. pe $[-1, 1]$
 f cont. pe $[-1, 0] \cup [0, 1]$ ca funcții elementare

Studiem cont. în $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} l_s &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (mx^2 + nx + p) = p \\ l_d &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (e^x) = e^0 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{p = 1}$$

$l_s = l_d$

- punem cond. ca f să fie derivabilă pe $(-1, 1)$ și în 0.

$$\begin{aligned} f'_s &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{mx^2 + nx + p - p}{x - 0} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{mx^2 + nx}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x(mx + n)}{x} = n \end{aligned}$$

$$f_d' = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1.$$

(am folosit $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a$, $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$)

$$f's = f_d' \Rightarrow \left. \begin{matrix} m \cdot p = 1 \\ p = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

Aplicăm T. lui Rolle.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= m \cdot (-1)^2 + n(-1) + p = m - n + p \\ f(1) &= e' = e \\ f(-1) &= f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} m - n + p &= e \\ m - 1 + 1 &= e \Rightarrow \boxed{m = e} \end{aligned}$$

5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție polinomială cu propr. că $(\exists) x_1 < x_2 < x_3$ a.i. $f(x_i) = x_i$, $i = 1, 2, 3$. Arătați că $(\exists) c \in \mathbb{R}$ a.i. $f''(c) = 0$.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} f(x_1) = x_1 &\Rightarrow f(x_1) - x_1 = 0 \\ f(x_2) = x_2 &\Rightarrow f(x_2) - x_2 = 0 \\ f(x_3) = x_3 &\Rightarrow f(x_3) - x_3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f(x_1) - x_1 &= f(x_2) - x_2 = \\ &= f(x_3) - x_3 = 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{consec.} \\ \text{T. Rolle} \end{matrix} \\ & \text{Notăm } g(x) = f(x_i) - x_i \Rightarrow g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) \Rightarrow \\ & \left. \begin{aligned} (\exists) c_1 \in (x_1, x_2) \text{ a.i. } g'(c_1) &= 0 \\ c_2 \in (x_2, x_3) \text{ a.i. } g'(c_2) &= 0 \\ c_3 \in (x_3, x_4) & \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{consec. T. Rolle}} (\exists) c \in (c_1, c_2) \text{ a.i. } g''(c) = 0 \Rightarrow f''(c) = 0 \end{aligned}$$

TEMA E3, E4, E5, A1 / 266 man