LECȚIA 9

cls a XI-a C

# Aplicații ale derivatelor funcțiilor - rădăcinile multiple ale ecuațiilor polinomiale

PROF. SCHNAKOVSZKI CĂTĂLINA

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ o funcție polinomială.

Def: 1) Se numește ecuație polinomială de gradul n, ecuația $f(x)=0$, unde f este funcție polinomială de gradul n.

Ex: $ax+b=0$, $a\neq 0$ - ec. polin. de gr I.

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ - ec. polin de gr II.

2) Nr. $x_0\in\mathbb{R}$ se numește rădăcină multiplă de ordinul $m\in\{1,2,\dots,n\}$ a ecuației polinomiale de gradul n, $f(x)=0$, dacă există o funcție g de gradul $n-m$, a.î.: a) $f(x)=(x-x_0)^m\cdot g(x)$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$

b) $g(x_0)\neq 0$.

Ex: $f(x)=(x-1)^3\cdot(x+2)$ $\Rightarrow$ $x=1$ este rădăcină ~~de~~ multiplă ~~de~~ triplă.

m se numește ordin de multiplicitate a rădăcinii $x_0$

Dacă $m=1,2,3,\dots$, - nr. $x_0$ - s.n. rădăcină simplă, dublă, triplă, etc.

TEOREMĂ: Dacă nr. $x_0\in\mathbb{R}$ este rădăcină multiplă ~~pentru~~ de ordinul m pt. ec. $f(x)=0$, atunci $x_0$ este rădăcină multiplă de ordinul $m-1$ pt. $f'(x)=0$.

Consecințe: 1) $x_0$ = rădăcină simplă dacă $f(x_0)=0$ și $f'(x_0)\neq 0$.

2) $x_0 \in \mathbb{R}$ este rădăcină dublă dacă $f(x_0)=f'(x_0)=0$ și $f''(x_0)\neq 0$

3) $x_0 \in \mathbb{R}$ este rădăcină triplă dacă $f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=0$ și este răd. simplă ptr. ec. $f''(x)=0$.

Ex: 1) Să se det. ordinul de multiplicitate al sol. $x=2$ ptr. ec. $x^4-3x^3-6x^2+28x-24=0$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-3x^3-6x^2+28x-24$

Calc. $f(2)=2^4-3\cdot 2^3-6\cdot 2^2+28\cdot 2-24=$

$=16-24-24+56-24=72-72=0$

$f'(x)=4x^3-9x^2-12x+28$

$f'(2)=4\cdot 2^3-9\cdot 2^2-12\cdot 2+28=32-36-24+28=0$

$f''(x)=12x^2-18x-12$

$f''(2)=12\cdot 2^2-18\cdot 2-12=48-36-12=\cancel{\quad}=0$

$\Rightarrow \cancel{f(2)=f'(2)=0,\ f''(2)\neq 0 \Rightarrow}$

$f'''(x)=24x-18$

$f'''(2)=48-18\neq 0$

$\Rightarrow f(2)=f'(2)=f''(2)=0$ și $f'''(2)\neq 0 \Rightarrow x=2$ este sol. triplă a lui $f(x)=0$.

2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+m$. Să se det. $m\in\mathbb{R}$ a.i. ec. $f(x)=0$ admite rădăcină dublă reală.

Dacă $x_0\in\mathbb{R}$ este răd. dublă $\Rightarrow f(x_0)=f'(x_0)=0$ și $f''(x_0)\neq 0$.

$f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow 3(x^2-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$\Rightarrow x_0\in\{1,-1\}$

Caz 1: Dacă $x_0 = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + m = 1 - 3 + m = -2 + m$

$\Rightarrow -2 + m = 0 \Rightarrow m = 2$

Caz 2: Dacă $x_0 = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + m = -1 + 3 + m = 2 + m$

$\Rightarrow 2 + m = 0 \Rightarrow m = -2$.

3. Să se det. nr. $a, b \in \mathbb{R}$ ptr. care ecuația:

$2ax^{2007} + bx^{223} + 32 = 0$ are rădăcina dublă $x_0 = 1$.

Fie $f(x) = 2ax^{2007} + bx^{223} + 32$, $x \in \mathbb{R}$.

$x_0 = 1$ este răd. dublă $\Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0$ și $f''(1) \neq 0$.

$f(1) = 2\cdot a\cdot 1^{2007} + b\cdot 1^{223} + 32 = 2a + b + 32$

$f'(x) = 4014ax^{2006} + 223bx^{222}$

$f'(1) = 4014a + 223b$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b + 32 = 0 \Rightarrow b = -2a - 32 \\ 4014a + 223b = 0 \end{cases}$

$4014a + 223\cdot(-2a - 32) = 0$

$4014a - 446a - 223\cdot 32 = 0$

$3568a = 223\cdot 32$

$a = \frac{\cancel{223}^{1}\cdot \cancel{32}^{2}}{\cancel{3568}_{\cancel{16}\,1}} = 2 \Rightarrow b = -4 - 32$

$b = -36$

R: $a = 2$, $b = -36$.

10/239 cul.

Să se det. fct. polin. de gradul al treilea pt. care sunt adevărate egalitățile: $f(1)=5$, $f'(-1)=1$, $f''(1)=6$, $f'''(0)=12$.

R

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$f''(x)=6ax+2b$$
$$f'''(x)=6a$$

$f'''(0)=12 \Rightarrow 6a=12 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$f''(1)=6 \Rightarrow 6a+2b=6 \Rightarrow 6\cdot 2+2b=6 \Rightarrow 2b=-6 \Rightarrow \boxed{b=-3}$

$f'(-1)=1 \Rightarrow 3\cdot 2\cdot(-1)^2+2\cdot(-3)\cdot(-1)+c=1$

$6+6+c=1 \Rightarrow \boxed{c=-11}$

$f(1)=5 \Rightarrow 2\cdot 1^3+(-3)\cdot 1^2+(-11)\cdot 1+d=5$

$2-3-11+d=5$

$d=5+12 \Rightarrow \boxed{d=17}$.

12/239 cul. $a,b\in\mathbb{R}=?$ a.î. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^4+2bx^2-2$ să se scrie sub forma $f(x)=(x-2)^2\cdot g(x)$, $g$ = fct. polin.

R

$(x-2)^2 \Rightarrow x=2$ este răd. dublă $\Rightarrow f(2)=f'(2)=0$ și $f''(2)\neq 0$

$f(2)=a\cdot 2^4+2\cdot b\cdot 2^2-2 \Rightarrow 16a+8b-2=0 \Rightarrow 16a+8b=2 /:2$

$\boxed{8a+4b=1}$

$f'(x)=4ax^3+4bx \Rightarrow f'(2)=4\cdot a\cdot 2^3+4\cdot b\cdot 2=0 \Rightarrow 32a+8b=0 /:4$

$\boxed{8a+2b=0}$

$\begin{cases} 8a+4b=1 \\ 8a+2b=0 \end{cases}$ −

$2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

$8a+4\cdot\frac{1}{2}=1$

$8a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{8}$

TEMĂ E4, E5, E6 / 254 man

8, 9 / 239 cul.