ROZE ① 15.04.

CLASA XI - C. PROF. SCHNAKOVSZKI C.

TEST BAC (3)

I. 1. Fie $z=1+i$. Arătați că $2z-z^2=2$.

R: $2z-z^2=2(1+i)-(1+i)^2=2+2i-(1+2i+i^2)=$

$=2+\cancel{2i}-\cancel{1}-\cancel{2i}+\cancel{1}=2$. (A)

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2m$, $m\in\mathbb{R}$.

$m\in\mathbb{R}=?$ a.î. $f(x)>0$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{R}$ $f(x)>0$ dacă $\Delta<0$ și $a>0$

$a=1>0$

$\Delta=m^2-8m \Rightarrow m^2-8m>0$ $\quad m=0$

$m(m-8)>0$ $\quad m-8=0\Rightarrow m=8$

m		0			8		
Δ	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+\ +$

$\Rightarrow m\in(0,8)$

3. $x\in\mathbb{R}=?$

$\log_5(\sqrt{x}+1)+\log_5(\sqrt{x}-1)=2$

Cond. $\begin{cases}\sqrt{x}+1>0 \Rightarrow \sqrt{x}>-1\\ \sqrt{x}-1>0\Rightarrow \sqrt{x}>1\end{cases} \Rightarrow x>1$

$\log_5(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)=2$

$\log_5(x-1)=2\Rightarrow x-1=5^2$

$\boxed{\log_a x=y \Leftrightarrow a^y=x}$

$a>0$, $a\neq1$

$x>0$

$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+$

$+\log_a c$

4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi știind că aceasta are exact 32 submulțimi.

#

O mulțime cu n elemente are $\boxed{2^n}$ submulțimi.

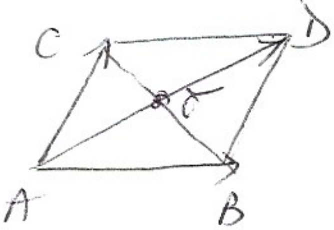
$2^n = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow \boxed{n=5}$

5. În xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,5)$, $C(6,1)$. Det. coordonatele punctului D, știind că $\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD}$

#

$\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD} \Rightarrow ABDC =$ paralelogram

$\Rightarrow AD$ și BC au același mijloc



$\Rightarrow \dfrac{x_C+x_B}{2} = \dfrac{x_A+x_D}{2} \Rightarrow \dfrac{6+2}{2} = \dfrac{0+x_D}{2}$

$\dfrac{y_C+y_B}{2} = \dfrac{y_A+y_D}{2} \Rightarrow \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{1+y_D}{2}$

$\Rightarrow 4 = \dfrac{x_D}{2} \Rightarrow x_D = 8$

$\dfrac{6}{2} = \dfrac{1+y_D}{2} \Rightarrow 1+y_D = 6 \Rightarrow y_D = 5$

$\Rightarrow D(8,5)$

6. $x = ?$ $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x - \cos x$

#

$\cos x - \sin x = \sin x - \cos x$

$\left.\begin{array}{l} 2\cos x = 2\sin x \Rightarrow \cos x = \sin x \\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}\ (45^\circ)$

II: 1. $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 2-a \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $\det(A(2)) = 8$

$$\det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (4-0) = 8.$$

b) Dem. că $A(a) \cdot A(b) = 2 \cdot A(ab-a-b+2)$, $(\forall)\, a, b \in \mathbb{R}$.

$$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 2-a \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-a & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 & 2-b \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-b & 0 & b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ab+0+(2-a)(2-b) & 0 & a(2-b)+0+b(2-a) \\ 0 & 4 & 0 \\ b(2-a)+a(2-b) & 0 & (2-a)(2-b)+ab \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ab+4-2b-2a+ab & 0 & 2a-ab+2b-ab \\ 0 & 4 & 0 \\ 2b-ab+2a-ab & 0 & 4-2b-2a+ab+ab \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2ab-2a-2b+4 & 0 & 2a+2b-2ab \\ 0 & 4 & 0 \\ 2a+2b-2ab & 0 & 4-2a-2b+2ab \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(ab-a-b+2) & 0 & 2[2-(ab-a-b+2)] \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} ab-a-b+2 & 0 & 2-(ab-a-b+2) \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-(ab-a-b+2) & 0 & ab-a-b+2 \end{pmatrix} =$$

$= 2 \cdot A(ab-a-b+2), (\forall) a, b \in \mathbb{R}$.

c) Determinați perechile de nr. întregi p și q pth. care $A(p) \cdot A(q) = 4 \cdot I_3$.

Din b) $A(p) \cdot A(q) = 2 \cdot A(pq-p-q+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot A(pq-p-q+2) = 4 \cdot I_3 \quad /:2$

$A(pq-p-q+2) = 2 \cdot I_3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} pq-p-q+2 & 0 & 2-(pq-p-q+2) \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-(pq-p-q+2) & 0 & pq-p-q+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow pq-p-q+2 = 2$

$pq-p-q = 0 \quad /+1 \quad \Rightarrow pq-p-q+1 = 1$

$p(q-1)-(q-1) = 1$

$\left.\begin{array}{l}(q-1)(p-1) = 1 \\ p, q \in \mathbb{Z}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} q-1 = 1 \Rightarrow q = 2 \\ p-1 = 1 \Rightarrow p = 2 \end{cases}$

$1 \cdot 1 = 1$

$(-1) \cdot (-1) = 1$

$\begin{cases} q-1 = -1 \Rightarrow q = 0 \\ p-1 = -1 \Rightarrow p = 0 \end{cases}$

$(p, q) \in \{(2, 2), (0, 0)\}$

III. 1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\ln(x^2+1)$

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{2(2x^2-x+2)}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

$$f'(x)=(4x)'-\left[\ln(x^2+1)\right]'=4-\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=$$

$$=\overset{x^2+1)}{4}-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{4x^2+4-2x}{x^2+1}=\frac{2\cdot(2x^2-x+2)}{x^2+1}.$$

b) Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left\{4(x+1)-\ln\left[(x+1)^2+1\right]-\right.$$

$$\left.-\left[4x-\ln(x^2+1)\right]\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\cancel{4x}+4-\ln\left[(x+1)^2+1\right]-\cancel{4x}+\ln(x^2+1)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(4-\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+1}\right)=\cancel{4+\ln}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(4-\ln\frac{\cancel{x^2}\cdot\left(1+\underset{\to 0}{\frac{2}{x}}+\underset{\to 0}{\frac{2}{x^2}}\right)}{\cancel{x^2}\cdot\left(1+\underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}\right)}\right)=4-\ln 1=4-0=$$

$$=4.$$

c) Demonstrați că f este bijectivă.

$f'(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ - injectivă

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ f \text{ - continuă pe } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ - surjectivă}$$

$\Rightarrow f$ - bijectivă

TEMĂ - TEST 4 de antrenament