$\boxed{2\ ore}$

FIȘĂ - ROZE ①

CLASA a $\overline{XI}$-a C PROF. SCHNAKOVSZKI CĂTĂLINA

Variante BAC:

TEST 47

I. 1. Determinați suma primilor șase termeni ai progresiei geometrice cu termeni reali $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2=6$ și $b_5=48$.

R: $b_2=b_1\cdot q \Rightarrow b_1\cdot q=6$

$b_5=b_1\cdot q^4 \Rightarrow b_1\cdot q^4=48$ $\Rightarrow \underbrace{b_1\cdot q}\cdot q^3=48 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6\cdot q^3=48 \Rightarrow q^3=8 \Rightarrow \boxed{q=2}, \boxed{b_1=3.}$

$S_n=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$, $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$

$S_6=3\cdot\frac{2^6-1}{2-1}=3\cdot\frac{64-1}{1}=3\cdot 63=189.$

2. Determinați imaginea intervalului $[-1,2]$ prin funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$.

R: $\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)-3=1+2-3=0 \\ f(2)=2^2-2\cdot 2-3=4-4-3=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow Im_{[-1,2]}=[-3;0]$

3. Rezolvați în mulțimea nr. reale ec:

$2^{2x+3}-3\cdot 2^{x+2}+4=0.$

R: $2^{2x}\cdot 2^3-3\cdot 2^x\cdot 2^2+4=0$

$8\cdot(2^x)^2-12\cdot 2^x+4=0$

Notăm $2^x = y \Rightarrow 8y^2 - 12y + 4 = 0 \;|:4$

$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$2y^2 - 2y - y + 1 = 0$$

$$2y(y-1) - 1(y-1) = 0$$

$$(y-1)(2y-1) = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$$

$S = \{-1; 0\}$.

4. Determinați termenul care nu depinde de x din dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^9$, unde $x > 0$.

R: $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

$$(a+b)^n = \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^9 \Rightarrow a = x^2$$

$$b = \frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1}$$

$$n = 9$$

$$T_{k+1} = C_9^k \cdot (x^2)^{9-k} \cdot (2 \cdot x^{-1})^k = C_9^k \cdot x^{18-2k} \cdot 2^k \cdot x^{-k} =$$

$$= C_9^k \cdot 2^k \cdot x^{18-3k}$$

Termenul care nu-l conține pe x, este cel ~~pentru~~ care are $x^0 \Rightarrow x^{18-3k} = x^0 \Rightarrow 18 - 3k = 0$

$$3k = 18$$

$$k = 6 \Rightarrow \boxed{T_7}$$

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,-1)$ și dreapta d cu ecuația $ax+(a+1)y-1=0$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați valoarea lui a pentru care punctul A aparține dreptei d.

R: $A\in d \Rightarrow x=2, y=-1 \Rightarrow a\cdot 2+(a+1)\cdot(-1)-1=0$

$$2a-a-1-1=0$$

$$a-2=0 \Rightarrow a=2$$

6. Calculați $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

R: $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>SUBIECTUL II</u>:

1. Se consideră sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x-ay-z=2 \\ 2x-y-2z=-1 \\ bx+2y+z=1 \end{cases}, \quad x,y,z,a,b\in\mathbb{R} \text{ și}$$

matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ b & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Arătați că $\det A=(2a-1)(b+1)$.

<u>R</u>: $\det A=\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ b & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_3+L_1}{\overset{L_2-2L_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & -1+2a & 0 \\ b+1 & 2-a & 0 \end{vmatrix}=$

$=(-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2a-1 \\ b+1 & 2-a \end{vmatrix}=-1\cdot 1\cdot\left[0-(2a-1)\cdot(b+1)\right]=$

$=(2a-1)(b+1)$.

b) Determinați soluția (x, y, z) a sistemului pentru $a = 1$, $b = -2$.

R:
$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ -2x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Sist. are 3 ecuatii, 3 necunoscute și $\det(A) = (2\cdot 1 - 1)(-2+1) =$
$= 1\cdot(-1) = -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ sist. de tip Cramer

$$x = \frac{\Delta x}{\det(A)}, \quad y = \frac{\Delta y}{\det(A)}, \quad z = \frac{\Delta z}{\det(A)}.$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{-2} + \cancel{2} + \cancel{2} - \cancel{1} + 8 - \cancel{1} = 8 \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{-1} = -8$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 8 + \cancel{2} + \cancel{2} - \cancel{4} = 5$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{-1} = -5$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 8 - 2 - \cancel{4} + \cancel{2} + \cancel{2} = 5$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow z = \frac{5}{-1} = -5$$

$$S = \{(-8, -5, -5)\}.$$

c) Pentru $a=-7$, $b=-1$, arătați că sistemul are o infinitate de soluții.

R: $\det(A) = [2\cdot(-7)-1]\cdot(-1+1) = -15\cdot 0 = 0 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat.

Calculăm determinantul principal:

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-14 = -15 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2$$

$$\Delta car = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1+8+7-\cancel{2}+\cancel{2}-14 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ sist. este compatibil nedeterminat cu

x, y = necunoscute principale

z = nec. secundară $\overset{not}{=} \alpha$.

Sistemul principal: $\begin{cases} x+7y = 2+\alpha \\ 2x - y = -1+2\alpha \end{cases}$

Aflăm x și y în funcție de α cu Cramer sau cu metoda reducerii:

$$\begin{cases} x+7y = 2+\alpha & |\cdot(-2) \\ 2x-y = -1+2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-14y = -4-2\alpha \\ 2x-y = -1+2\alpha \end{cases}$$

$$/ \quad -15y = -5$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}}$$

$x + 7\cdot\frac{1}{3} = 2+\alpha$

$x = \overset{3)}{2} - \frac{7}{3} + \alpha$

$$\boxed{x = -\frac{1}{3}+\alpha}$$

$$S = \left\{\left(-\frac{1}{3}+\alpha, \frac{1}{3}, \alpha\right)\right\}$$