

Subiectul I

1. Determinați conjugatul numărului complex $z = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6$.
2. Determinați valoarea maximă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3 - \sqrt{x^2 + 3} = x$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,0)$ și $C(2,0)$. Determinați aria triunghiului ABC .
6. Arătați că $(\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$, pentru orice număr real x .

Subiectul al II-lea

1. Se consideră determinantul $D(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

- a) Calculați $D(1,0)$.
- b) Arătați că $D(a,b) = (a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a și b .
- c) Demonstrați că numărul $D(m,n)$ este par pentru orice numere întregi m și n .

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

- a) Rezolvați în \mathbb{Z}_6 ecuația $\hat{3}x + \hat{2} = \hat{5}$.
- b) Determinați mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$, $f(x) = x^3 - x$.
- c) Determinați numărul elementelor mulțimii $H = \{x^{10} \mid x \in \mathbb{Z}_6\}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

- a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

- b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- c) Demonstrați că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

- a) Calculați $\int_0^1 (x+1)f(x) dx$.

- b) Calculați $\int_1^e (x+1)f(x) \ln x dx$.

- c) Arătați că $F(e-1) = \frac{e^2 - 4e + 7}{2}$, unde $F: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(0) = 1$.