LECȚIA 4. CLASA a XI-a C ①

23.03.2020.

PROF. SCHNAKOVSZKI CĂTĂLINA

DERIVATELE UNOR FUNCȚII ELEMENTARE

Să considerăm funcția $f: D \to \mathbb{R}$, o funcție derivabilă pe mulțimea D.

Derivata sa este funcția $f': D_{f'} \to \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$, unde $D_{f'}$ este domeniul de derivabilitate al funcției f.

Cu ajutorul acestei formule, se găsesc derivatele câtorva funcții elementare:

1) $c' = 0$, $(\forall) c \in \mathbb{R}$ constantă

2) $x' = 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$

3) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$

4) $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$, $r \in \mathbb{R}$, $(\forall) x \in (0, +\infty)$

5) $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\forall) x \in (0, +\infty)$

6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\forall) x \in (0; +\infty)$

7) $(e^x)' = e^x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$

8) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

9) $(\sin x)' = \cos x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$

10) $(\cos x)' = -\sin x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$

11) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$, $\cos x \neq 0$

12) $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $\sin x \neq 0$

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\forall)\ x \in (-1,1)$

14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\forall)\ x \in (-1,1)$

15) $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

16) $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

17) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $(\forall)\ x \in (0,+\infty)$, $a>0$, $a \neq 1$

18) $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Obs: Trebuie făcută distincția între numerele $f'(x_0)$ care reprezintă valoarea derivatei f' în x_0 (atunci când aceasta există) și $(f(x_0))'$ care reprezintă derivata constantei $f(x_0)$ și este zero.

Ex: $(\ln)'(2) = \frac{1}{2}$ și $(\ln 2)' = 0$

$\ln 2$ = constantă (nr.)

am aplicat $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin')\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)' = 0$

$\sin\frac{\pi}{6}$ = constantă (nr.)

am aplicat $(\sin x)' = \cos x$

EXERCIȚII: 1) Să se calculeze derivatele funcțiilor $f: D \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x) = 2004 \Rightarrow (f(x))' = (2004)' = (const)' = 0$

b) $f(x) = 11 \cdot \sqrt{2005} \Rightarrow f'(x) = (11\sqrt{2005})' = 0$

c) $f(x) = x^{2004} \Rightarrow f'(x) = (x^{2004})' = 2004 \cdot x^{2004-1} = 2004 \cdot x^{2003}$

d) $f(x) = 2004^x \Rightarrow f'(x) = (2004^x) = 2004^x \cdot \ln 2004$

am aplicat $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

e) $f(x) = x^{\frac{2010}{2009}} \Rightarrow f'(x) = \left(x^{\frac{2010}{2009}}\right) = \frac{2010}{2009} \cdot x^{\frac{2010}{2009}-1} = \frac{2010}{2009} \cdot x^{\frac{1}{2009}}$

am aplicat $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$

f) $f(x) = e^{2009 \cdot x} \Rightarrow f'(x) = (e^{2009x})' = e^{2009x} \cdot \ln(e^{2009}) =$

$= e^{2009 \cdot x} \cdot 2009$

am aplicat $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

2) Se dă funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_8(9x^2) - \log_8(9x)$

a) Să se aducă $f(x)$ la forma cea mai simplă

b) Să se calculeze $f'(x)$.

---

a) $f(x) = \log_8 \frac{9x^2}{9x} = \log_8 x$ (am folosit $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$)

b) $f'(x) = (\log_8 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 8} = \frac{1}{x \cdot \ln 2^3} = \frac{1}{x \cdot 3 \ln 2} = \frac{1}{3x \ln 2}$

am aplicat $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

3) Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\,(x\sqrt{x}+1)}{x^3+x\sqrt{x}}$

a) Să se aducă f la forma cea mai simplă

b) Calculați $f'(x)$.

—//—

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\,(x\sqrt{x}+1)}{x^3+x\sqrt{x}}=\dfrac{x(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}}{x(x^2+\sqrt{x})}=\dfrac{x\cdot x+\sqrt{x}}{x\,\cancel{(x^2+\sqrt{x})}}=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$.

b) $f'(x)=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-1-1}=-1\cdot x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, dacă $3\cdot f'(m)+7\cdot f'(\sqrt{m})=30$.

—//—

$f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=(x^3)'=3\cdot x^{3-1}=3x^2$

$f'(m)=3\cdot m^2$

$f'(\sqrt{m})=3\cdot(\sqrt{m})^2=3\cdot m$

Înlocuind în ecuație $\Rightarrow 3\cdot 3m^2+7\cdot 3m=30$

$9m^2+21m-30=0 \;/:3$

$3m^2+7m-10=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m\in\left\{1;-\frac{10}{3}\right\}$. Convine doar $m=1$ din existența lui $\sqrt{m}$.

TEMĂ , $\boxed{\text{TEMĂ - pag 236 - man}}$