Teorie grafuri orientate C++

Un graf orientat este o pereche ordonată de mulţimi G = (V , E).

Multimea V este o multime nevida si finita de elemente denumite varfurile grafului.

Multimea E este o multime de perechi formate cu ajutorul varfurilor din graf.

In cazul grafurilor orientate, perechile de varfuri din multimea E sunt ordonate si se numesc arce. Ele au o directie spre care merg. Arcul format de varfurile x si y se noteaza cu (x,y), varful x se numeste extremitate initiala a arcului (x,y), iar varful y se numeste extremitate finala a arcului (x,y).

Daca exista un arc determinat de varfurile x si y atunci, varfurile x si y se numesc adiacente. De asemenea, varfurile x si y sunt considerate incidente cu arcul pe care il formeaza. Fiecare extremitate a unui arc este considerata incidenta arcului respectiv.

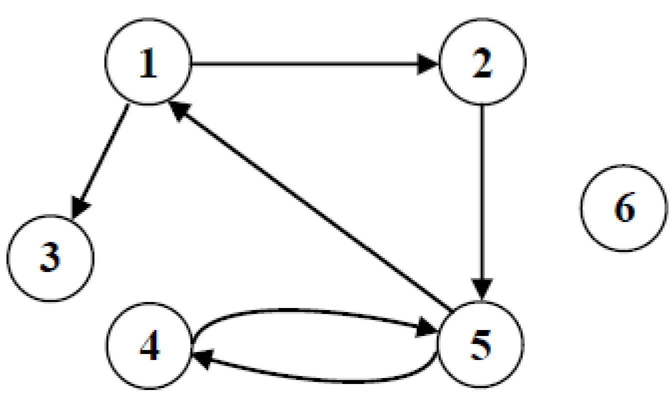
1. Reprezentarea vizuala a grafurilor orientate:

1. Pentru a usura reprezentarea acestora, pentru fiecare varf al grafului se deseneaza un cerc si in interiorul cercului se trece numarul varfului.

2. Fiecare arc se reprezinta vizual ca o sageata care pleaca din extremitatea initiala si ajunge in extremitatea finala.

Graf orientat $G = (V, E)$.
$V = \{1,2,3,4,5,6\}$,
$E = \{(1,2), (1,3), (2,5), (4,5), (5,1)(5,4)\}$

Exemplu:



2. Gradul unui varf

In cazul grafurilor orientate exista 2 tipuri de grade pe care un varf le poate avea: gradul exterior si gradul interior.

Gradul exterior al varfului x se noteaza cu $d^+(x)$ si este egal cu numarul de arce care au ca extremitate initiala pe x. In alte cuvinte, gradul exterior al varfului x reprezinta numarul de arce care pleaca din acel varf.

Gradul interior al varfului x se noteaza d^- si este egal cu numarul de arce care au ca extremitate finala pe x. In alte cuvinte, gradul interior al unui varf x este egal cu numarul de arce care ajung in acel varf.

Spre exemplu, pentru graful de mai sus avem:

x	1	2	3	4	5	6
$d^+(x)$	2	1	0	1	2	0
$d^-(x)$	1	1	1	1	2	0

Teorema:

Suma gradelor interioare ale varfurilor unui graf orientat este egala cu suma gradelor exterioare ale varfurilor grafului si este egala cu numarul de arce din graf.

$$\Sigma d^+(x) = \Sigma d^-(x) = m$$

3. Notiunile de drum si circuit

Se numeste **drum** intr-un graf orientat o secventa de varfuri $(x_1,x_2,\dots,x_p)$, astfel incat pentru oricare doua varfuri consecutive x_i si x_{i+1} exista arcul (x_i,x_{x+1}). De exemplu, pentru graful de mai sus, secventa de varfuri (1,2,5,1,3) este un drum de lungime 4.

Se numeste **lungime a unui drum** numarul de arce continute de acesta.

Un drum este **elementar** daca nu contine de mai multe ori acelasi varf. De exemplu, pentru graful de mai sus, secventa de varfuri (1,2,5,4) este un drum elementar de lungime 3.

Un drum este **simplu** daca nu contine de mai multe ori aceeasi muchie De exemplu, pentru graful de mai sus, secventa de varfuri (1,2) este un drum simplu de lungime 1.

Un **circuit** este un drum simplu pentru care extremitatea initiala coincide cu extremitatea finala. In alte cuvinte, drumul pleaca dintr-un varf si ajunge in acelasi varf. De exemplu, pentru graful de mai sus, secventa de varfuri (5,4,5,4,5) este un circuit, intrucat el pleaca din varful 1 si ajunge tot in varful 1.

Un **circuit** se numeste **elementar** daca nu contine de mai multe ori acelasi varf (exceptie facand extremitatile sale). De exemplu, pentru graful de mai sus, secventa de varfuri (1,2,5,1) este un **circuit elementar**.

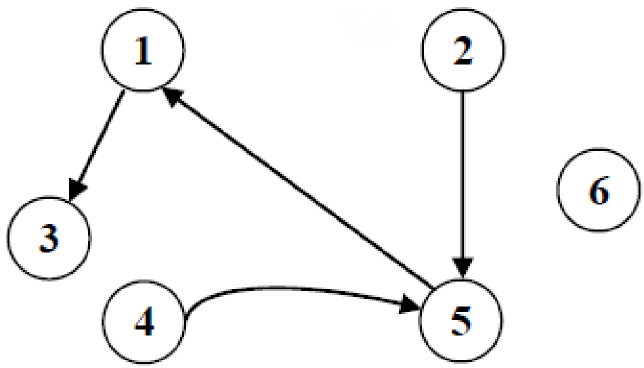
Teoreme:
Un drum/circuit elementar se numeste **hamiltonian** daca el trece prin toate varfurile grafului.
Un drum/circuit elementar se numeste **eulerian** daca el trece prin fiecare arc al grafului o singura data.

4. Grafuri asociate unui graf dat

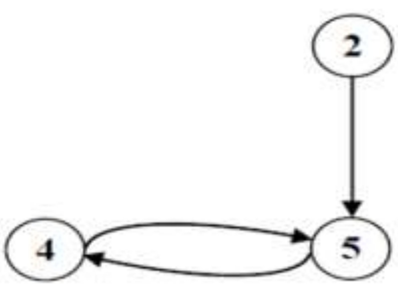
Fie G = (V,E) un graf orientat.

Graful G' = (V,E') se numeste **graf partial** al lui G daca E' ⊂ E.

Un **graf partial** al lui G se obtine eliminand arce din graful G.



Graful partial de mai sus a fost obtinut prin eliminarea arcelor (1,2), (5,4) din graful initial de la inceputul postarii.
Un **subgraf** al lui G se obtine eliminand varfuri din graful G impreuna cu toate arcele incidente cu acestea.



Subgraful de mai sus a fost obtinut prin eliminare varfurilor 1,3 si 6 si a arcelor incidente cu acestea: (1,2), (1,3), (5,1) din graful initial.
Un **subgraf partial** al lui G se obtine eliminand varfuri din graful G, toate arcele incidente cu varfurile eliminate, precum si alte arce din graf.

Teoreme:

Fie G un graf orientat cu n varfuri si m muchii:

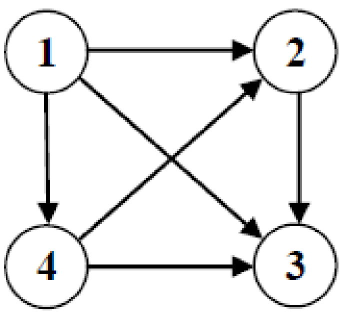
a) Numarul de grafuri partiale ale lui G este 2^m-1.

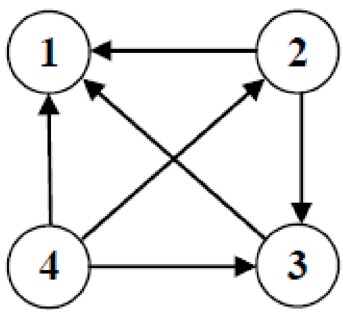
b) Numarul de subgrafuri ale lui G este 2^n-1.

5. Tipuri speciale de grafuri orientate:

Un graf orientat se numeste **complet** daca oricare 2 varfuri ale acestuia sunt adiacente. Graful orientat complet cu n varfuri se numeste K_n si contine [n(n-1)]/2 muchii.

Exemplu:





Grafurile de mai sus sunt grafuri orientate complete cu 4 varfuri.

In cazul grafurilor orientate, pentru un numar fixat de varfuri pot exista mai multe grafuri complete.