LECȚIA 10.
cls a XI-a C.
(2 ore)

TEST - DERIVATE

PROF. SCHNAKOVSZKI C.

1. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$, dacă $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x}$, $x_0=9$.

2. Să se determine parametrii reali a, b astfel încât funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \ln^4 x, & x\in(0;e] \\ ax^2+bx+1, & x>e \end{cases}$ să fie derivabilă pe $(0;+\infty)$.

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+5}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.
Să se arate că f are derivată în $x_0=2$ și să se calculeze $f'(2)$.

4. Să se determine derivata funcției f și apoi $f'(x_0)$, acolo unde x_0 este indicat:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^4-2x^3+5x+10$, $x_0=-1$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2\sin x+3)(1-5\cos x)$

c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\neq 1$, $x_0=0$.

d) $f(x)=\dfrac{\ln x+x}{\ln x-x}$, $x>0$, $x_0=1$

5. Să se calculeze derivatele următoarelor funcții f indicând și domeniul de definiție D_f și de derivabilitate $D_{f'}$:

a) $f(x)=(x^2-3x)^5$

b) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

c) $f(x)=\sin^3(x^2+3x)$

d) $f(x)=\sqrt{\ln x}$

6. Să se calculeze $f'(x)$ și $f''(x)$ ptr. funcția $f: D \to \mathbb{R}$, dacă: $f(x)=\frac{\sin x}{2+\sin x}$

7. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x=-2$ pentru ecuația polinomială

$3x^4+12x^3+11x^2-4x-4=0$.

REZOLVARE:

1. Ec. tg. în $(x_0, f(x_0)) = ?$, dacă $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$,

$f(x) = x+\sqrt{x}$, $x_0 = 9$.

Ec. tg. este: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$x_0 = 9 \Rightarrow f(x_0) = f(9) = 9+\sqrt{9} = 9+3 = 12$

$$f'(9) = \lim_{x\to 9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9} = \lim_{x\to 9}\frac{x+\sqrt{x}-12}{x-9} = \lim_{x\to 9}\frac{x-9+\sqrt{x}-3}{x-9} =$$

$$= \lim_{x\to 9}\left(\frac{\cancel{x-9}}{\cancel{x-9}} + \frac{\cancel{\sqrt{x}-3}}{\cancel{(\sqrt{x}-3)}(\sqrt{x}+3)}\right) = \lim_{x\to 9}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right) = 1+\frac{1}{3+3} =$$

$$= {}^{6)}1+\frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$

Ec. tg. este: ${}^{6)}y - {}^{6)}12 = \frac{7}{6}(x-9) \;/\cdot 6$

$$6y - 72 = 7x - 63$$

$$-7x+6y-9=0 \;/\cdot(-1)$$

$$\boxed{7x-6y+9=0}$$

2. $a,b\in\mathbb{R} = ?$ a.î. $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \ln^4 x, & x\in(0;e] \\ ax^2+bx+1, & x>e \end{cases}$ să fie derivabilă pe $(0,+\infty)$

f este cont. în $x_0 = e \Leftrightarrow l_s = l_d$.

$$l_s = \lim_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x) = \lim_{\substack{x\to e\\x<e}} \ln^4 x = \ln^4 e = (\ln e)^4 = 1^4 = 1$$

$$l_d = \lim_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x) = \lim_{x\to e}(ax^2+bx+1) = a\cdot e^2 + b\cdot e + 1$$

$\Rightarrow a \cdot e^2 + be + 1 = 1$

$a \cdot e^2 + b \cdot e = 0$

$e(a \cdot e + b) = 0 \Rightarrow \boxed{a \cdot e + b = 0} \Rightarrow a \cdot e = -b \quad (1)$

f este derivabilă în $x_0 = e \Leftrightarrow f'_s(e) = f'_d(e)$

$$f'_s(e) = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{\ln^4 x - \ln^4 e}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} \frac{\ln^4 x - 1}{x - e}$$

$$f'_d(e) = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{ax^2 + bx + \cancel{1} - \cancel{1}}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{ax^2 + bx}{x - e}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4 \cdot \ln^3 x \cdot \frac{1}{x}, & x \in (0; e] \\ 2ax + b, & x > e \end{cases}$$

$$f'_s(e) = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to e \\ x < e}} 4 \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} = 4 \cdot \ln^3 e \cdot \frac{1}{e} = \frac{4}{e}$$

$$f'_d(e) = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} f'(x) = 2 \cdot ae + b$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \cdot a \cdot e + b = \frac{4}{e} \overset{(1)}{\Longrightarrow} -2b + b = \frac{4}{e} \Leftrightarrow -b = \frac{4}{e} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{4}{e}}$$

$$a \cdot e = \frac{4}{e} \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{e^2}}$$

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f are derivată în $x_0 = 2$ și să se calc. $f'(2)$.

f are derivată în $x_0 = 2$ dacă $\exists \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - \sqrt{9}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+5)-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{4}{\sqrt{9}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$f'(2) = \frac{2}{3}$$

4. a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 10$, $x_0 = -1$

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5 \Rightarrow f'(-1) = 12\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1)^2 + 5 =$$
$$= -12 - 6 + 5 = -18 + 5 = -13$$

b) $f(x) = (2\sin x + 3)(1 - 5\cos x)$

$$f'(x) = (2\sin x+3)'\cdot(1-5\cos x) + (2\sin x+3)(1-5\cos x)' =$$
$$= 2\cos x\cdot(1-5\cos x) + (2\sin x+3)(0 - 5\cdot(-\sin x)) =$$
$$= 2\cos x - 10\cos^2 x + (2\sin x+3)(5\sin x) =$$
$$= 2\cos x - 10\cos^2 x + 10\sin^2 x + 15\sin x =$$
$$= 2\cos x - 10(\cos^2 x - \sin^2 x) + 15\sin x =$$
$$= 2\cos x - 10\cdot\cos 2x + 15\sin x$$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{1\cdot(x-1) - (x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(0) = -\frac{2}{(0-1)^2} = -\frac{2}{1} = -2$$

d) $f(x) = \frac{\ln x + x}{\ln x - x}$, $x_0 = 1$

$$f'(x) = \frac{(\ln x + x)'(\ln x - x) - (\ln x + x)(\ln x - x)'}{(\ln x - x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)(\ln x - x) - (\ln x + x)\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{(\ln x - x)^2} =$$

(4)

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{x}\ln x} - \frac{1}{x}\cdot x + \ln x \cancel{- x} \cancel{- \frac{1}{x}\ln x} + \ln x - x\cdot\frac{1}{x} \cancel{+ x}}{(\ln x - x)^2} =$$

$$= \frac{2\ln x - 2}{(\ln x - x)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{2\ln 1 - 2}{(\ln 1 - 1)^2} = \frac{2\cdot 0 - 2}{(0-1)^2} = \frac{-2}{1} = -2.$$

5. a) $f(x) = (x^2-3x)^5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 5\cdot(x^2-3x)^4\cdot(x^2-3x)' = 5\cdot(x^2-3x)^4\cdot(2x-3) \Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R}.$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$, $1+x^2 > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$

$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0 \Rightarrow (1-x^2) \geq 0$

$\frac{+}{+} = +$ $\quad (1-x)(1+x) \geq 0$

$1-x = 0 \Rightarrow x = 1$

$1+x = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$ $+$	0	$-$	$-$

$x \in [-1;1] \Rightarrow \boxed{D_f = [-1;1]}$

$$f'(x) = \left[\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(1-x^2)'(1+x^2)-(1-x^2)\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\overbrace{-2x \cancel{-2x^3} - 2x}^{-4x} \cancel{+2x^3}}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot(1+x^2)^2}$$

$D_{f'} = ?$ $\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \neq 0 \Rightarrow \boxed{D_{f'} = (-1;1)}$ — (de mai sus)

c) $f(x)=\sin^3(x^2+3x)$ $\quad D_f=\mathbb{R}$.

$f'(x)=\left[\sin^3(x^2+3x)\right]'=3\cdot\sin^2(x^2+3x)\cdot\left[\sin(x^2+3x)\right]'\cdot(x^2+3x)'=$

$=3\sin^2(x^2+3x)\cdot\cos(x^2+3x)\cdot(2x+3)$. $\boxed{D_{f'}=\mathbb{R}}$

d) $f(x)=\sqrt{\ln x}$ $\quad D_f=[1;+\infty)$

$f'(x)=\left((\ln x)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(\ln x)'=$

$=\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; $\boxed{D_{f'}=(1;+\infty)}$

6. $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sin x}{2+\sin x}$

f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, fiind formată din funcții derivabile și $f'(x)=\frac{(\sin x)'(2+\sin x)-\sin x(2+\sin x)'}{(2+\sin x)^2}=$

$=\frac{\cos x(2+\sin x)-\sin x\cdot(-\cos x)}{(2+\sin x)^2}=\frac{2\cos x+\sin x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos x}{(2+\sin x)^2}=$

$=\frac{2\cos x(1+\sin x)}{(2+\sin x)^2}$

$f''(x)=\frac{\left[2\cos x(1+\sin x)\right]'\cdot(2+\sin x)^2-2\cos x(1+\sin x)\left[(2+\sin x)^2\right]'}{(2+\sin x)^4}=$

$=\frac{\left[-2\sin x(1+\sin x)+2\cos^2 x\right](2+\sin x)^2-2\cos x(1+\sin x)\cdot 2\cdot(2+\sin x)\cdot\cos x}{(2+\sin x)^4}$

$=\frac{\cancel{(2+\sin x)}\cdot\left[-2\sin x-2\sin^2 x+2\cos^2 x\right](2+\sin x)-4\cos^2 x(1+\sin x)}{(2+\sin x)^{\cancel{4}\,3}}$

7. $x = -2$.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 + 12x^3 + 11x^2 - 4x - 4$.

$$f(-2) = 3\cdot(-2)^4 + 12\cdot(-2)^3 + 11\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) - 4$$
$$= 3\cdot 16 + 12(-8) + 11\cdot 4 + 8 - 4$$
$$= 48 - 96 + 44 + 4 = -48 + 48 = 0$$

$$f'(x) = 12x^3 + 36x^2 + 22x - 4$$

$$f'(-2) = 12\cdot(-2)^3 + 36\cdot(-2)^2 + 22\cdot(-2) - 4$$
$$= 12\cdot(-8) + 36\cdot(+4) - 44 - 4$$
$$= -96 + 144 - 48 = 0$$

$$f''(x) = 36x^2 + 72x + 22$$

$$f''(-2) = 36\cdot(-2)^2 + 72\cdot(-2) + 22 = 144 - 144 + 22 = 22 \neq 0$$

$\Rightarrow f(-2) = f'(-2) = 0$ și $f''(-2) \neq 0 \Rightarrow x = -2$ este rădăcină dublă.

TEMĂ TESTE pag 255–256 man