

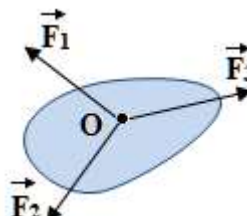
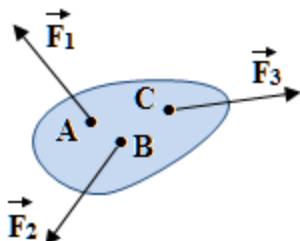
Cap. III. ELEMENTE DE STATICĂ

Statica –studiază echilibrul corpurilor

Noțiuni introductive

Sistem de forțe - totalitatea forțelor care acționează simultan asupra aceluiaș corp

Sistem de forțe concurente - dacă forțele au același punct de aplicație



Două sisteme de forțe oarecare se numesc **sisteme echivalente** dacă produc același efect asupra corpului

Dacă sistemul de forțe este echivalent cu o singură forță, atunci această forță se numește

rezultanta sistemului de forțe ($\vec{R}$) și se obține prin operații de compunere a vectorilor

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

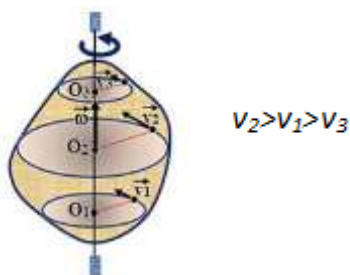
Tipuri de mișcări ale unui solid rigid

Corpul **solid rigid** –este un corp ale cărui dimensiuni nu se neglijează, iar distanțele reciproce dintre punctele sale materiale rămân neschimbate.

Sub acțiunea unui sistem de forțe, solidul rigid poate efectua două tipuri de mișcări:

1. Mișcare de translație –dacă orice dreaptă care unește oricare două puncte ale solidului își păstrează orientarea pe toată durata mișcării. Toate punctele care alcătuiesc corpul solid au traiectorii, viteze și accelerații identice. *Exemple: mișcarea unui autoturism pe autostradă sau a unui tren pe sine, mișcarea unui teleferic*

2. Mișcare de rotație – în care fiecare punct al corpului descrie o traiectorie circulară, al cărei centru se află pe axa de rotație, cu viteze diferite *Exemple: deschiderea ușii, mișcarea unei mașini în sens giratoriu, mișcarea Pământului în jurul axei sale*



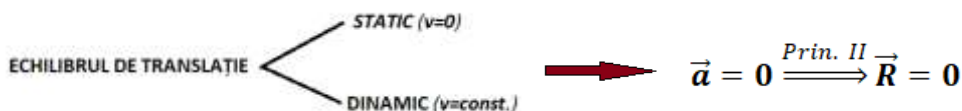
Mișcarea de rotație poate fi **uniformă** (cu viteză unghiulară constantă) sau **neuniformă** (accelerată sau încetinită)

Un corp solid poate efectua simultan o mișcare de translație și o mișcare de rotație.

Exemplu: o minge de rugby șutată de un jucător

Condiția de echilibru la translație

Un corp este în echilibru în raport cu mișcarea de translație dacă se află în *repaus* (**echilibru static**) sau în *mișcare rectilinie uniformă* (**echilibru dinamic**)



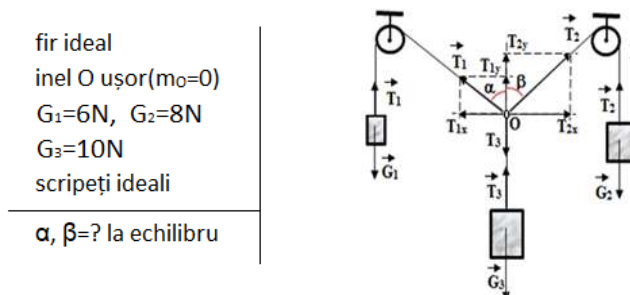
Un corp solid este în echilibru de translație dacă rezultanta sistemului de forțe ce acționează asupra lui este zero

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = 0$$

În urma proiectării pe cele două axe de coordonate OX și Oy se obține :

$$\begin{cases} \vec{R}_x = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3x} + \dots + \vec{F}_{nx} = 0 \\ \vec{R}_y = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{3y} + \dots + \vec{F}_{ny} = 0 \end{cases}$$

Problemă rezolvată: De mijlocul unui fir este legat un inel ușor O, considerat un punct material, a cărui greutate este neglijabilă, în raport cu forțele ce acționează asupra lui. Capetele firului, care susțin două corpuri cu greutățile $G_1 = 6\text{N}$ și $G_2 = 8\text{N}$, sunt trecute peste doi scripeți mici. De inel se leagă un al doilea fir, care susține un corp de greutate $G_3 = 10\text{N}$. Să se determine unghiurile α și β pentru poziția de echilibru a punctului O.



Condiția de echilibru la translație: $\vec{R} = 0$, se va scrie

- Pentru primul corp: $\vec{T}_1 + \vec{G}_1 = 0$, proiectând pe axa Oy $\Rightarrow T_1 - G_1 = 0 \Rightarrow T_1 = G_1$ (1)
- Pentru al doilea corp: $\vec{T}_2 + \vec{G}_2 = 0$, proiectând pe axa Oy $\Rightarrow T_2 - G_2 = 0 \Rightarrow T_2 = G_2$ (2)
- Pentru al treilea corp: $\vec{T}_3 + \vec{G}_3 = 0$, proiectând pe axa Oy $\Rightarrow T_3 - G_3 = 0 \Rightarrow T_3 = G_3$ (3)
- Pentru inelul O: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$, proiectând pe axele Ox și Oy $\Rightarrow$

$$\begin{cases} - \text{pe Ox:} & T_{2x} - T_{1x} = 0 \Rightarrow T_{2x} = T_{1x} \\ - \text{pe Oy:} & T_{1y} + T_{2y} - T_3 = 0 \Rightarrow T_{1y} + T_{2y} = T_3 \end{cases} \quad (4)$$

Dar $T_{1x} = T_1 \cdot \sin \alpha \xrightarrow{(1)} T_{1x} = G_1 \cdot \sin \alpha$
 $T_{1y} = T_1 \cdot \cos \alpha \xrightarrow{(1)} T_{1y} = G_1 \cdot \cos \alpha$

$T_{2x} = T_2 \cdot \sin \beta \xrightarrow{(2)} T_{2x} = G_2 \cdot \sin \beta$
 $T_{2y} = T_2 \cdot \cos \beta \xrightarrow{(2)} T_{2y} = G_2 \cdot \cos \beta$

Înlocuind relațiile (4) obținem: $\begin{cases} G_2 \cdot \sin \beta = G_1 \cdot \sin \alpha \\ G_1 \cdot \cos \alpha + G_2 \cdot \cos \beta = G_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} G_2 \cdot \sin\beta = G_1 \cdot \sin\alpha \\ G_2 \cdot \cos\beta = G_3 - G_1 \cdot \cos\alpha \end{cases}$, ridicând la pătrat și adunând membru cu membru cele două ecuații, ținând cont că $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, obținem:

$$\cos\alpha = \frac{G_3^2 + G_1^2 - G_2^2}{2 \cdot G_1 \cdot G_3} = 0,6 \Rightarrow \alpha \approx 53^\circ$$

În mod asemănător:

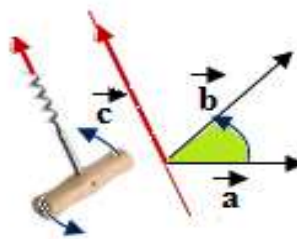
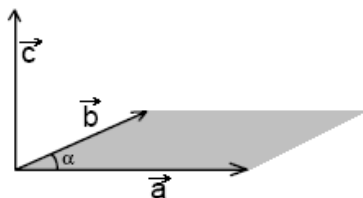
$$\cos\beta = \frac{G_3^2 + G_2^2 - G_1^2}{2 \cdot G_1 \cdot G_2} = 0,8 \Rightarrow \beta \approx 37^\circ$$

Temă: Problemele rezolvate 1 și 2 din manual pag. 121-122

Produsul vectorial

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori oarecare care fac unghiul α între ei. Se numește **produs vectorial** al celor doi vectori, notat $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, **vectorul care are:**

- **Modulul** $c = a \cdot b \cdot \sin\alpha$
- **Direcția** perpendiculară pe planul determinat de cei doi vectori, în punctul lor de concurență, O
- **Sensul** dat de regula burghiului



Regula burghiului, (a șurubului, sau a tirbușonului). Se așează burghiul paralel cu direcția vectorului și se rotește astfel încât să se suprapună primul vector peste cel de-al doilea pe drumul cel mai scurt. Sensul de înaintare al burghiului este sensul vectorului **produs vectorial**.

Proprietăți ale produsului vectorial.

a) Produsul vectorial este **anticomutativ**: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

b) Produsul vectorial este **distributiv față de adunare**: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Momentul forței ($\vec{M}$)

-Este o mărime fizică vectorială care caracterizează efectul de rotație produs de o forță asupra unui corp

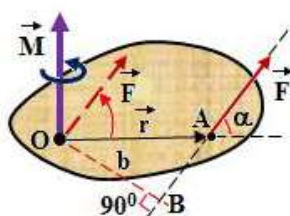
Să presupunem că un corp solid se rotește în jurul unui punct fix, numit și pol (sau articulație), sub acțiunea unei forțe.

Def. Momentul forței în raport cu un pol se definește ca **produsul vectorial dintre vectorul de poziție ($\vec{r}$) al punctului de aplicație al forței față de pol și vectorul forță($\vec{F}$)**:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Vectorul moment al forței $\vec{M}$ are următoarele caracteristici:

- **Direcția** perpendiculară pe planul vectorilor $\vec{r}$ și $\vec{F}$
- **Sensul** dat de regula burghiului (rotim $\vec{r}$ peste $\vec{F}$)
- **Modulul** $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$



O - articulație (pol)
A - punctul de aplicație al forței
 $\vec{OA} = \vec{r}$
b - brațul forței ($b = OB$)

Brațul forței(b) față de un punct este distanța de la acel punct până la deapta-suport a forței.

Obs. Brațul forței față de punctul O este **lungimea perpendicularei** dusă din O pe dreapta suport a forței

$$\widehat{OAB} = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cdot \sin \alpha \Rightarrow M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot b$$

Momentul forței este produsul dintre forță și brațul ei.

$$M = F \cdot b$$

Unitatea de măsură pentru momentul forței este: $[M]_{SI} = [F]_{SI} \cdot [b]_{SI} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$

ATENȚIE! În acest caz $1 \text{ N} \cdot \text{m}$ nu se transformă în **Jouli**

OBSERVAȚII:

- 1) Momentul forței nu depinde de poziția forței pe dreapta-suport
- 2) $M = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$ polul (punctul de rotație O) se află pe dreapta suport a forței
- 3) Dacă asupra corpului solid acționează un sistem de forțe concurente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$, atunci:

Momentul rezultantei unui sistem de forțe concurente, în raport cu un pol, este egal suma vectorială a momentelor forțelor concurente, în raport cu același pol

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots + \vec{M}_n = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n \\ &= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{R} \end{aligned}$$

Condiția de echilibru la rotație

Un solid rigid este în echilibru în raport cu mișcarea de rotație dacă se află în *repaus* (nu se rotește) sau *se rotește uniform în jurul axei de rotație*.

Un corp solid este în echilibru de rotație dacă suma vectorială a momentelor forțelor ce acționează asupra lui este zero

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots + \vec{M}_n = 0$$

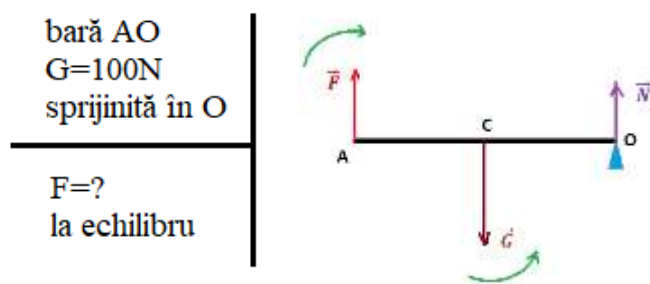
Convenție de semn:

-Considerăm pozitive momentele forțelor care *rotesc* corpul în *sensul invers mișcării acelor de ceas* (sens trigonometric): $M > 0$

-Considerăm negative momentele forțelor care *rotesc* corpul *sensul mișcării acelor de ceas*: $M < 0$

Probleme

1. O bară de greutate $G=100\text{N}$ este sprijinită cu un capăt de un suport. Aflați ce forță verticală trebuie să acționeze asupra celuilalt capăt al barei pentru a o menține orizontală.



Condiția de echilibru la rotație față de punctul O este: $\vec{M}_F + \vec{M}_G + \vec{M}_N = 0$

Observăm că:

$\vec{F}$ rotește bara în sensul acelor de ceas $\Rightarrow M_F < 0$

$\vec{G}$ rotește bara în sensul acelor de ceas $\Rightarrow M_G > 0$

$\vec{N}$ nu rotește bară deoarece acționează în punctul O și are braț $b_N=0 \Rightarrow M_N = 0$

Condiția de echilibru devine: $-M_F + M_G = 0 \Rightarrow M_G = M_F$ (1)

$$M_G = G \cdot b_G = G \cdot CO = G \cdot \frac{l}{2}$$

$$M_F = F \cdot b_F = F \cdot AO = F \cdot l, \text{ unde } l \text{ este lungimea barei}$$

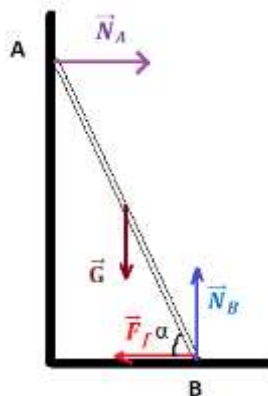
$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} G \cdot \frac{l}{2} = F \cdot l, \text{ împărțind relația la } l \Rightarrow \frac{G}{2} = F \Rightarrow F = \frac{100\text{N}}{2} = 50\text{N}$$

2. O scară AB, de greutate $G=300\text{N}$, este sprijinită cu capătul A de un perete vertical, presupus fără frecări și cu celălalt pe planul orizontal. Scara face unghiul $\alpha=60^\circ$ cu planul orizontal.

- Determinați coeficientul de frecare al capătului B al scândurii cu planul orizontal.
- Calculați reacțiunea peretelui și cea a suprafeței orizontale asupra scândurii

scara AB
 $G=300N$
 perete vertical ($F_f=0$)
 suprafață orizontală
 $\alpha=60^\circ$

a) $\mu=?$
 b) $N_A=?$, $N_B=?$



Condiția de echilibru la translație: $\vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{G} + \vec{F}_f + \vec{N}_A + \vec{N}_B = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Pe Ox: } N_A - F_f = 0 \Rightarrow N_A = F_f & (1) \\ \text{Pe Oy: } N_B - G = 0 \Rightarrow N_B = G \Rightarrow N_B = 300N \end{cases}$$

Condiția de echilibru la rotație față de punctul B: $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{M}_G + \vec{M}_{N_A} + \vec{M}_{N_B} + \vec{M}_{F_f} = 0$

$\vec{G}$ rotește bara în sens invers acelor de ceas, față de B $\Rightarrow M_G < 0$

$\vec{N}_A$ rotește bara în sensul acelor de ceas, față de B $\Rightarrow M_{N_A} > 0$

$\vec{N}_A$ și $\vec{F}_f$ nu rotesc bara, față de B $\Rightarrow M_{N_A} = 0$ și $M_{F_f} = 0$

Condiția de echilibru la rotație, față de B, devine: $-M_G + M_{N_A} = 0 \Rightarrow M_{N_A} = M_G$ (2)

$$M_{N_A} = N_A \cdot b = N_A \cdot l \cdot \sin \alpha$$

$$M_G = G \cdot b_G = G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} N_A \cdot l \cdot \sin \alpha = G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha \Rightarrow N_A \cdot \sin \alpha = \frac{G}{2} \cdot \cos \alpha \Rightarrow N_A = \frac{G}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$N_A = \frac{300N}{2} \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 150N \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 50\sqrt{3}N$$

$$F_f = \mu \cdot N_B \Rightarrow \mu = \frac{F_f}{N_B} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \mu = \frac{N_A}{N_B} = \frac{50\sqrt{3}N}{300N} = \frac{\sqrt{3}}{6} = 0,29$$

Temă: O scândură de lungime $l=6m$ și masă $m_1=24kg$ este sprijinită la distanța $d=2m$, de un capăt. Ce masă m_2 are corpul care, așezat pe capătul mai scurt, menține scândura în echilibru?

