

LECTIA 7:

①

Derivata de ordinul

doi a unei funcții - clasa a XI - C

PROF. SCHNAKOVSKI C.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$

Def: 1) Funcția f se numește de două ori derivabilă în $x_0 \in D$ dacă f este derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0 și funcția f' este derivabilă în x_0 .
2) Dacă f este de două ori derivabilă în x_0 , derivata lui f' în x_0 s.n. derivata de ordinul doi (derivata a doua) a funcției f în x_0 și se not. $f''(x_0)$.

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Funcția $(f')'(x) \stackrel{\text{not}}{=} f''(x) = f^{(2)}(x)$ - derivata a doua a lui f .

Obs: Dacă f este derivabilă numai în x_0 (sau pe o mult. care nu are pe x_0 punct de acumulare), nu se poate defini derivata a doua în x_0 .

Ex: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 - x^2, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ este derivabilă numai în $x_0 = 0$
 $\Rightarrow$ nu se poate pune probl.

derivabilității de ordinul II în $x_0 = 0$

(2) -

Ex:

1. Să se arate că f este derivabilă de două ori și să se determine f'' în cazurile:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Sol: Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcții derivabile și: $f'(x) = (2x^2 - x + 1)' = 4x - 1$.

Funcția f' este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcții elementare $\Rightarrow f''(x) = (4x - 1)' = 4$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

~~+~~ Fct. $\sin$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca fct. elem. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = (\sin x)' = \cos x$$

Fct. $\cos$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca fct. elem. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f''(x) = (\cos x)' = -\sin x, x \in \mathbb{R}.$$

c) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

f derivabilă ca o compunere de funcții derivabile $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = [\ln(x^2 + 1)]' = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

f' este derivabilă ca și cât de fct. elem. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(2x)'(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

d) $f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = (e^{2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2 \cdot e^{2x}$

$$f''(x) = (2 \cdot e^{2x})' = 2 \cdot (e^{2x})' = 4 \cdot e^{2x}.$$

- (3) -

2) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$. Să se arate că f este de două ori derivabilă în $x_0 = 0$ și să se calculeze $f''(0)$.

Studiem continuitatea în $x_0 = 0$

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (\sin^2 x) = \sin^2 0 = 0$$

$$l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2) = 0^0 = 0$$

$\Rightarrow l_s = l_d = f(0)$
 $\Rightarrow f$ cont. în $x = 0$

$$f(0) = \sin^2 0 = 0$$

Studiem derivabilitatea în $x_0 = 0$

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin^2 x - 0}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 1 \cdot \sin 0 = 0$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 - 0}{x} = 0$$

$$\Rightarrow f'_d(0) = f'_s(0) = f'(0) = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 0$

Studiem dacă f este de două ori derivabilă în $x_0 = 0$. Pn. aceasta calculăm $f'(x) = \begin{cases} 2 \sin x \cdot \cos x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x, & x > 0. \end{cases}$

$$f''_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2 \sin x \cdot \cos x - 0}{x} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2,$$

$$f_d''(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2x - 0}{x} = 2 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_s''(0) = f_d''(0) = 2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este de două ori derivabilă în $x_0 = 0$

③ Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + m, & x \leq 2 \\ -2x^2 + nx + p, & x > 2 \end{cases}$

Să se det. $m, n, p \in \mathbb{R}$ aî. f să fie de două ori derivabilă în $x = 2$.

— $\#$ 3 nec $\Rightarrow$ 3 ec. cu 3 nec.

④ Punem cond. ca f să fie cont. în $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} l_s &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + m) = 4 + 6 + m = 10 + m \\ l_d &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-2x^2 + nx + p) = -8 + 2n + p \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow l_s = l_d \Rightarrow 10 + m = -8 + 2n + p \Rightarrow \boxed{m - 2n - p = -18} \quad (1)$

⑤ Punem cond. ca f să fie derivabilă în $x = 2$

$$f_s'(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 + 3x + m - m - 10}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$$

$$f_d'(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-2x^2 + nx + p - m - 10}{x - 2}$$

$$\Rightarrow f_s'(2) = f_d'(2) \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-2x^2 + nx + p - m - 10}{x - 2}$$

$$\Rightarrow 2^2 + 3 \cdot 2 - 10 = -2 \cdot 4 + 2n + p - m - 10 \Rightarrow$$

$$\textcircled{2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-2x^2 + nx + p - m - 10}{x - 2}$$

*) Punem condiția ca f să fie derivabilă în $x=2$

$$f'_s(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 + 3x + m - (m + 10)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 + 3x + \cancel{m} - \cancel{m} - 10}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 + 5x - 2x - 5 \cdot 2}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x(x+5) - 2(x+5)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{(x+5)(x-2)}{x-2} = 2 + 5 = 7$$

$$f'_d(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-2x^2 + nx + p - m - 10}{x - 2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-2x^2 + 4x - 4x + 8 + nx - 2n + 2n + p - m - 10 - 8}{x - 2} =$$

am adunat și scăzut $4x, 8, 2n$ din (1)

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-2x(x-2) - 4(x-2) + n(x-2) - (m - 2n - p) - 18}{x - 2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{(x-2)(-2x-4+n)}{x-2} = \frac{-18}{x-2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{(x-2)(-2x-4+n)}{x-2} = -2 \cdot 2 - 4 + n = -8 + n$$

$$f'_s(2) = f'_d(2) \Rightarrow 7 = -8 + n \Rightarrow \boxed{n = 15} \quad (2)$$

⑩ Funcția f este de două ori derivabilă în $x_0 = 2 \Leftrightarrow$
 $f_o''(2) = f_d''(2) \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3, & x < 2 \\ 7, & x = 2 \\ -4x+n, & x > 2 \end{cases}$$

$$f_o''(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x+3-7}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x-2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$f_d''(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-4x+n-7}{x-2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-4x+15-7}{x-2} =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-4x+8}{x-2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-4(x-2)}{x-2} = -4.$$

$f_o''(2) = f_d''(2) \Rightarrow 2 = -4$ (F) $\Rightarrow$ nu există $m, n, p \in \mathbb{R}$
 pentru care f să fie de două ori derivabilă în 2.

TEMA : cul pag 235 - ex. și probl. rez: 1 $\rightarrow$ 4

pag 238 - ex 1, 2 și 6a, 7a.