~~L~~ECȚIA 6: **Derivarea funcției inverse**

clasa a XI-a C

Fie I, J - intervale de nr. reale și $f: I \to J$ o funcție continuă și bijectivă. Dacă funcția f este derivabilă în $x_0 \in I$ și $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția $f^{-1}: J \to I$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și $\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$.

Ex: 1) Fie $f: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Să se arate că: a) f este bijectivă; b) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$.

a) f este strict crescătoare pe $(0; +\infty)$ (ca sumă de funcții strict crescătoare) $\Rightarrow f$ - injectivă.

$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x + \ln x) = 0 + \ln 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

f are propr. Darboux

$\Rightarrow f((0; +\infty)) = \mathbb{R} \Rightarrow f$ - surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă

b) $f(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow f(1) = 1 + \ln 1 = 1 \Rightarrow$ | $\Rightarrow \exists f^{-1}: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ derivabilă pe $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}.$$

2. Fie $f:(0;+\infty)\to(1;+\infty)$, $f(x)=x^4+x^2+x+1$

Să se arate că f - bijectivă și să se calc. $(f^{-1})'(4)$.

\#

Arătăm că f strict cresc.

f - cresc $\iff \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$ $\forall x,y$ a.î. $x>y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{x^4+x^2+x+1-(y^4+y^2+y+1)}{x-y}=$$

$$=\frac{(x^4-y^4)+(x^2-y^2)+(x-y)}{x-y}=$$

$$=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)+(x-y)(x+y)+(x-y)}{(x-y)}=$$

$$=\frac{\cancel{(x-y)}[(x+y)(x^2+y^2+(x+y)+1]}{\cancel{x-y}}>0\Rightarrow f\text{ - strict}$$

cresc. pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f$ - injectivă

are prop. Darboux (~~f cont~~ pe $\mathbb{R}$ ~~...~~ int. în interval).

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$\Rightarrow f(0;+\infty)=(1;+\infty)\Rightarrow f$ surjectivă

$\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă $\Rightarrow \exists f^{-1}:(1;+\infty)\to(0,+\infty)$.

Deoarece $f(1)=4 \Rightarrow (f^{-1})'(4)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4\cdot 1^3+2\cdot 1+1}=\dfrac{1}{7}$

$x_0=1\Rightarrow y_0=4$

$f'(x)=4x^3+2x+1$

$$\cancel{=\frac{1}{4\cdot 64+8+1}=\frac{1}{256+8+1}=\frac{1}{265}}$$

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + ex$. Să se arate că f este bijectivă și să se calc. $(f^{-1})'(2e)$.

#

f strict cresc. pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ - injectivă

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -\infty} f(x) = e^{-\infty} + e(-\infty) = -\infty \\ &\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{\infty} + e\cdot\infty = \infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \xRightarrow{f \text{ are propr. lui Darboux}} f\text{-surjectivă} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ - bijectivă $\Rightarrow \exists f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dacă $x_0 = 1 \Rightarrow f(1) = e^1 + e\cdot 1 = 2e$

$$(f^{-1})'(2e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e^1 + e} = \frac{1}{2e}.$$

$$f'(x) = e^x + e$$

4. Fie $f: \mathbb{R} \to (1; +\infty)$, $f(x) = 3^{-2x} + 3^{-x} + 1$. Să se arate că f este bijectivă și să se calculeze $(f^{-1})'(3)$.

#

f - strict descrescătoare $\Rightarrow f$ - injectivă

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (3^{-2x} + 3^{x} + 1) = \cancel{1}\ 3^{\infty} + 3^{-\infty} + 1 = \infty + 0 + 1$$

$$= \infty_{\ 0} + 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (3^{-2x} + 3^{-x} + 1) = 3^{-\infty} + 3^{-\infty} + 1 \ \cancel{=} \ \cancel{0+0+1}.$$

$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = (1; +\infty) \xRightarrow{f \text{ are propr. Darboux}} f$ surjectivă $\Rightarrow f$ - bijectivă $\Rightarrow \exists f^{-1}: (1; +\infty) \to \mathbb{R}$

Dacă $x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0 = f(0) = 3^0 + 3^0 + 1 = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3^{-2\cdot 0}\cdot \ln 3\cdot(-2) + 3^{-0}\cdot \ln 3(-1)} = -\frac{1}{3\ln 3}.$$

$$f'(x) = 3^{-2x}\cdot \ln 3\cdot(-2) + 3^{-x}\cdot \ln 3(-1)$$

am folosit: $\boxed{(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'}$

4. Fie $f: \mathbb{R} \to (1; +\infty)$, $f(x) = 4^x + 2^x + 1$. Arătați că f este bijectivă și calculați $(f^{-1})'(3)$.

f strict crescătoare $\Rightarrow$ f - injectivă

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4^{-\infty} + 2^{-\infty} + 1 = 1$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4^{\infty} + 2^{\infty} + 1 = \infty$

$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = (1; +\infty) \xRightarrow{\text{f are prop. Darboux}} f$ - surjectivă

$\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow \exists f^{-1}: (1; +\infty) \to \mathbb{R}$.

Dacă $x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0 = f(0) = 4^0 + 2^0 + 1 = 3$

$\Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4^0 \cdot \ln 4 + 2^0 \ln 2} = \frac{1}{\ln 4 + \ln 2} = \frac{1}{\ln 8} = \frac{1}{\ln 2^3} = \frac{1}{3 \ln 2}$

$f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 \cdot x' + 2^x \cdot \ln 2 \cdot x' + 1' = 4^x \ln 4 + 2^x \cdot \ln 2$

$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

Temă: până mâine ex. rezolvat pag 245 man.

11 rezolvat / pag 232 cul.