LECȚIA 15 ① PROF. SCHNAKOVSZKI C.

CLASA XI C

ȘIRUL LUI ROLLE

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval de nr. reale și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție numerică.

Dacă f este funcție continuă, criteriul Cauchy-Bolzano dă condiții suficiente ca ecuația $f(x)=0$ să aibă soluții reale pe intervalul I.

Ne reamintim Criteriul Cauchy-Bolzano:

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ continuă pe int. I și $a, b \in I$, $a<b$.

Dacă $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ ec. $f(x)=0$ are cel puțin o sol. c pe intervalul (a, b).

Șirul lui Rolle este o aplicație importantă a teoremei lui Rolle, cu ajutorul căruia se realizează separarea soluțiilor ecuației $f(x)=0$.

Separarea soluțiilor ec. $f(x)=0$ înseamnă:

a) determinarea nr. de soluții reale ale ecuației

b) precizarea intervalelor în care sunt situate aceste soluții

Etapele formării șirului lui Rolle sunt:

I) Se fixează intervalul I de studiu al ecuației $f(x)=0$ și se def. funcția $f: I \to \mathbb{R}$, fiind presupusă derivabilă.

II) Se calculează f' ~~x~~, se rezolvă ecuația $f'(x)=0$ și aranjăm în ordine crescătoare rădăcinile acesteia: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

III) Calculăm valorile funcției f în aceste puncte, la care adăugăm limitele lui f la capetele din stânga și respectiv din dreapta ale intervalului I, notate cu α, β.

IV) Șirul lui Rolle este șirul semnelor acestor valori (poate figura și valoarea 0)

V) Se trag concluziile privind nr. de rădăcini reale ale ecuației și intervalele în care acestea sunt plasate.

Distingem următoarele cazuri:

1. Dacă în șirul lui Rolle apar două semne alăturate identice, atunci în intervalul corespunzător nu există nici o soluție reală a ec. $f(x)=0$

2. Dacă în șirul lui Rolle apar două semne alăturate diferite, ecuația $f(x)=0$ are o singură soluție în intervalul respectiv.

3. Dacă în șirul lui Rolle apare zero, $f(x_k)=0$, atunci se consideră că x_k este rădăcină multiplă a ec. $f(x)=0$, iar în intervalele (x_{k-1}, x_k), (x_k, x_{k+1}) ec. nu mai are rădăcini

4. Nr. schimbărilor de semn și al zerourilor din șirul lui Rolle det. nr. sol. reale și intervalele în care sunt situate.

Exerciţii:

1) Să se separe soluţiile reale ale ecuaţiei:

$$3x^4-8x^3-6x^2+24x-10=0$$

I) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-10$, derivabilă pe $\mathbb{R}$ (ca fcţie polinomială).

II) $f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

Rezolvăm $f'(x)=0 \Rightarrow 12x^3-24x^2-12x+24=0$

$$12x^2(x-2)-12(x-2)=0$$

$$12(x-2)(x^2-1)=0$$

$$12(x-2)(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

III) Calculăm valorile funcţiei în aceste puncte:

$f(2)=3\cdot 2^4-8\cdot 2^3-6\cdot 2^2+24\cdot 2-10=\cancel{\;}-2$

$f(1)=3\cdot 1^4-8\cdot 1^3-6\cdot 1^2+24\cdot 1-10=\cancel{12}\ 3$

$f(-1)=3\cdot(-1)^4-8\cdot(-1)^3-6\cdot(-1)^2+24\cdot(-1)-10=-29$

şi la capete: $\alpha=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\beta=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$

Alcătuim tabelul:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$+\infty$	$\cancel{-29}$ -29	1	-2	$+\infty$
Şirul lui Rolle	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

În şirul lui Rolle avem 4 schimbări de semn $\Rightarrow$ ec. are patru soluţii: $x_1<-1$, $x_2\in(-1,1)$; $x_3\in(1,2)$, $x_4>2$.

2. Să se discute după valorile parametrului real a numărul de rădăcini ale ecuației $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + a$.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + a$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$4x^2(x-3) - 4\cdot(x-3) = 0$$

$$(x-3)(4x^2-4) = 0$$

$$(x-3)\cdot 4\cdot(x^2-1) = 0 \Rightarrow (x-3)\cdot 4(x-1)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Calculăm valorile funcției în aceste puncte:

$f(3) = a-9$ $\qquad \alpha = \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

$f(-1) = a-9$

$f(1) = a+7$ $\qquad \beta = \lim_{x\to \infty} f(x) = +\infty$

Valorile lui f se fac în funcție de parametrul a.

Egalăm aceste valori cu 0 $\Rightarrow a-9=0 \Rightarrow a=9$

$a+7=0 \Rightarrow a=-7$ și

în funcție de ele se face discuția șirului lui Rolle ca în tabelul următor:

a \ x, $f(x)$	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
	$+$	$a-9$	$a+7$	$a-9$	$+$	CONCLUZII
$a<-7$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1<-1$, $x_2>3$
$a=-7$	$+$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1<-1$, $x_2=x_3=1$, $x_4>3$
$a\in(-7;9)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1<-1$, $x_2\in(-1;1)$, $x_3\in(1,3)$, $x_4>3$
$a=9$	$+$	0	$+$	0	$+$	$x_1=x_2=-1$; $x_3=x_4=3$
$a>9$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	nici o rădăcină reală.

Temă manual pag 268 - probl. rezolvate
pag 269 - E1, E2.