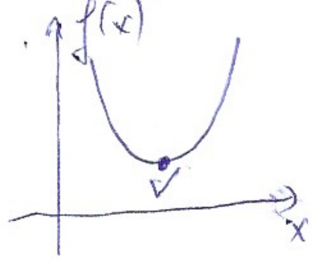
CLASA a XI-a C

FUNCȚII DERIVABILE PE UN INTERVAL

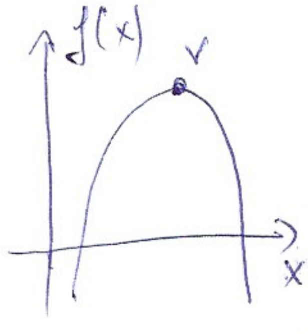
1. Puncte de extrem ale unei funcții; Teorema lui Fermat

Noțiunea de punct extrem a fost întâlnită în clasa a IX-a la reprezentarea grafică a funcției de gradul II, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Reprezentarea grafică este o parabolă care, dacă: 1) $a>0$, are minim vârful $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.



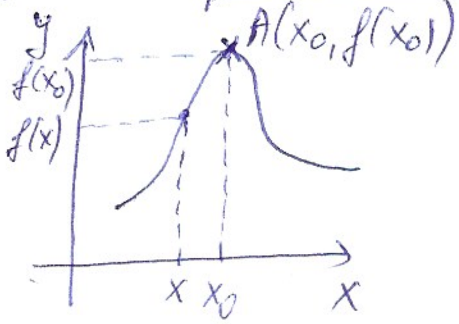
2) $a<0$, are maxim vârful $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.



Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$, o funcție reală de variabilă reală:

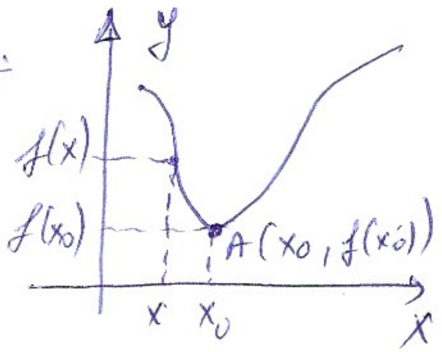
Def 1: Punctul $x_0\in D$ se numește <u>punct de maxim relativ (local) al funcției f</u> dacă există o vecinătate V a lui x_0, a.î. pentru orice $x\in V\cap D$, are loc relația $f(x)\leq f(x_0)$.

Valoarea $f(x_0)$ - s.n. maximul relativ (local) al funcției, iar punctul $A(x_0, f(x_0))$ de pe grafic s.n. punct de maxim relativ al acestuia.



2. Un punct $x_0 \in D$ se numește punct de minim relativ (local) al funcției f dacă $(\exists)$ o vecinătate V a punctului x_0 a.î. pentru orice $x \in V \cap D$, are loc relația $f(x) \geq f(x_0)$.

Valoarea $f(x_0)$ - s.n. minimul relativ (local) al funcției, iar punctul $A(x_0, f(x_0))$ de pe grafic s.n. punct de minim relativ al acestuia.

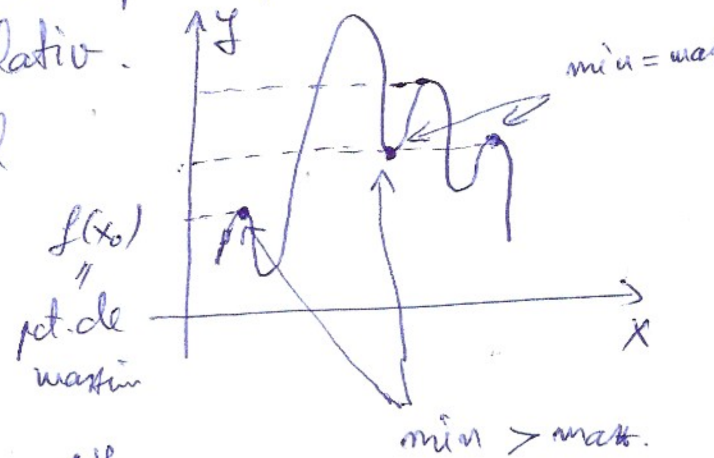


Punctele (x_0) de maxim relativ sau de minim relativ s.n. puncte de extrem relativ ale funcției, iar valorile funcției în punctele de extrem relativ s.n. extremele relative ale funcției.

Punctele de maxim relativ și de minim relativ ale graficului funcției s.n. puncte de extrem relativ ale graficului.

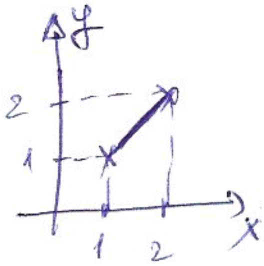
Obs: 1) O funcție poate avea mai multe puncte de extrem relativ, iar un minim relativ poate fi mai mare sau egal decât un maxim relativ.

De aceea se folosește cuvântul „relativ".



2) E posibil ca o funcție să nu aibă puncte de extrem.

Ex: $f:(1,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$



Def: 1) Un punct $x_0 \in D$ este <u>punct de maxim absolut al funcției f</u> dacă $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in D$. Valoarea $f(x_0)$ = maximul absolut al f.

Orice punct de maxim absolut este și punct de maxim relativ, dar invers nu este adevărat (în general).

Obs: O funcție poate avea mai multe puncte de maxim absolut.

2) Un punct $x_0 \in D$ este <u>punct de minim absolut</u> al funcției $f: D \to \mathbb{R}$, dacă $f(x) \ge f(x_0)$, $\forall x \in D$.

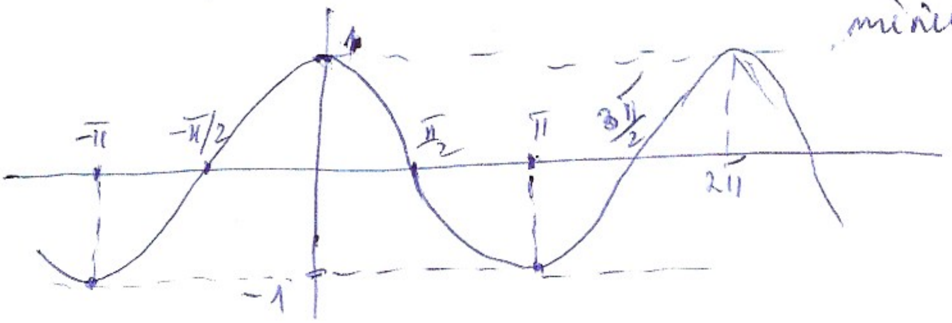
Valoarea $f(x_0)$ - s.n. <u>minimul absolut</u> al funcției f.

Orice punct de minim absolut este și punct de minim relativ, dar invers nu este adevărat (în general).

Obs: O funcție poate avea mai multe puncte de minim absolut.

Punctele de maxim absolut și de minim absolut se numesc puncte de <u>extrem absolut</u>.

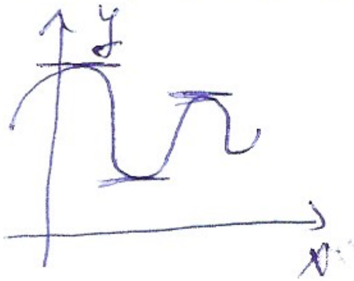
De ex: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ are maxim $f(2k\pi)=1$ și minim $f(2k\pi+1)=-1$, $k\in\mathbb{Z}$.



TEOREMA LUI FERMAT

Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și $x_0\in(a,b)$ un punct de extrem al funcției. Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0)=0$.

Interpretare geometrică: Teorema lui Fermat arată că într-un punct de extrem din interiorul unui interval, tangenta la graficul unei funcții derivabile este $\parallel Ox$ (panta este 0).



Ec. tangentei la grafic era:

$y-f(x_0)=m(x-x_0)$ unde $m=f'(x_0)$ (panta).

Punctele $x_0\in D$ pentru care $f'(x_0)=0$ se numesc puncte critice ale lui f.

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem ale unei funcții derivabile sunt printre punctele critice ale funcției.

Ex: 1: Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct fixat. Arătați că x_0 este punct de extrem pentru f în cazurile:

a) $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0 = 1$ este punct de minim.

$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 2 - 2 = 0$

Fie $x, y \in (-\infty; 1)$, $x \neq y \Rightarrow R = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} =$

$$= \frac{x^2 - 2x - (y^2 - 2y)}{x - y} = \frac{x^2 - y^2 - 2x + 2y}{x - y} = \frac{(x-y)(x+y) - 2(x-y)}{x - y} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-y)}(x+y-2)}{\cancel{x-y}} = x + y - 2 < 0 \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty; 1)$

Pt. $x, y \in (1; +\infty)$, $x \neq y \Rightarrow R = x + y - 2 > 0 \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(1; +\infty)$

$\Rightarrow$ 1 este punct de minim

b) $f(x) = -x^2 + 4x$, $x_0 = 2$ este punct de maxim.

$f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f'(2) = -2 \cdot 2 + 4 = -4 + 4 = 0$

Fie $x, y \in (-\infty; 2)$, $x \neq y \Rightarrow R = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} =$

$$= \frac{-x^2 + 4x - (-y^2 + 4y)}{x - y} = \frac{-x^2 + 4x + y^2 - 4y}{x - y} = \frac{-(x^2 - y^2) + 4(x - y)}{x - y}$$

$$= \frac{-(x-y)(x+y) + 4(x-y)}{x - y} = \frac{\cancel{(x-y)} \cdot [-x - y + 4]}{\cancel{(x-y)}} = -x - y + 4 > 0$$

$\Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty; 2)$

Pt. $x, y \in (2; +\infty)$, $x \neq y \Rightarrow R = -x - y + 4 < 0 \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow$

② . Determinați punctele critice ale funcției $f: E \to \mathbb{R}$, în cazurile :

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

b) $f(x) = x^3 + 3x$

$f'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2+1) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x^2 = -1 \\ \text{Dar } x^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ nu are sol. $\Rightarrow$ nu are puncte critice

c) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \Rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

$$f'(x) = \frac{1' \cdot x(x-1) - 1 \cdot [x(x-1)]'}{[x(x-1)]^2} = \frac{0 - [x' \cdot (x-1) - x \cdot (x-1)']}{[x(x-1)]^2} =$$

$$= \frac{-(\cancel{x} - 1 - \cancel{x})}{[x(x-1)]^2} = \frac{1}{x^2 \cdot (x-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2 \cdot (x-1)^2} = 0$ (F) $\Rightarrow$ nu are puncte critice.

TEMĂ : - ex. rezolvate pag 241 - 242 cul.

- ex 1, 2, 3 / 242 cul.

Modalități practice de a demonstra că o funcție $f: D \to \mathbb{R}$ este monotonă pe o mulțime $A \subset D$:

1. Fie $x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 < x_2$

   a) Dacă $f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f$ cresc. pe A

   b) Dacă $f(x_1) - f(x_2) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f$ descr.

2. Notăm $R = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, unde $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$

   a) dacă $R \geq 0 \Rightarrow f$ crescătoare pe A

   b) dacă $R \leq 0 \Rightarrow f$ descr. pe A.